



UNIVERSIDAD DE LA RIOJA

TRABAJO FIN DE ESTUDIOS

Título

Conjuntos con Dimensión Fraccionaria

Autor/es

VÍCTOR GALILEA MARTÍN

Director/es

FRANCISCO JAVIER PÉREZ LÁZARO

Facultad

Facultad de Ciencia y Tecnología

Titulación

Grado en Matemáticas

Departamento

MATEMÁTICAS Y COMPUTACIÓN

Curso académico

2017-18



Conjuntos con Dimensión Fraccionaria, de VÍCTOR GALILEA MARTÍN
(publicada por la Universidad de La Rioja) se difunde bajo una Licencia Creative
Commons Reconocimiento-NoComercial-SinObraDerivada 3.0 Unported.
Permisos que vayan más allá de lo cubierto por esta licencia pueden solicitarse a los
titulares del copyright.



UNIVERSIDAD DE LA RIOJA

Facultad de Ciencia y Tecnología

TRABAJO FIN DE GRADO

Grado en Matemáticas

Conjuntos con Dimensión Fraccionaria

Realizado por:

Víctor Galilea Martín

Tutelado por:

Francisco Javier Pérez Lázaro

Logroño, 5 de Junio de 2018

Resumen

Este trabajo trata de comprender qué son y cómo se comportan matemáticamente los fractales. Para ello, en la primera parte de este trabajo, se plasma la teoría matemática que hay detrás. Se han tocado temas de teoría de la medida, autosemejanza y se ha hecho énfasis en la teoría de la dimensión, hablando de dimensión Hausdorff, que permite que la dimensión sea un número no entero, y la dimensión de cubrimientos, una dimensión topológica que solo permite números enteros. Esto ha permitido hacer un análisis de varios de estos conjuntos fractales, como el conjunto de Cantor o el de Julia.

Summary

This paper is about understanding what fractals are and how they behave mathematically. To do this, the first part of this paper presents the mathematical theory behind it. Themes of measurement theory, self-similarity have been touched upon and emphasis has been placed on the dimension theory, speaking of the Hausdorff dimension, which allows the dimension to be a noninteger number, and the covering dimension, a topological dimension that only allows integer numbers. This has allowed an analysis of several of these fractal sets, such as Cantor's or Julia's set.

Índice general

Capítulos	Página
1. Introducción	5
2. Medida y dimensión de Hausdorff	9
2.1. Preliminares	9
2.2. Construcción de la medida de Hausdorff	12
2.3. Caracterización de la dimensión de Hausdorff	16
2.3.1. Teorema del contenido	17
2.3.2. Teorema de la unión	17
3. Autosemejanza	19
4. Dimensión topológica	23
4.1. Orden de una familia de conjuntos	23
4.2. Espacios de dimensión cero	25
4.3. Dimensión de cubrimientos	25
4.3.1. Teoremas de suma	30
4.3.2. Teorema de subconjunto	32
5. Ejemplos de fractales	35
5.1. Conjunto de Cantor	35
5.1.1. Introducción	35
5.1.2. Cálculo de la dimensión fraccionaria del conjunto de Cantor	36
5.1.3. Caracterización de los elementos del conjunto de Cantor	37
5.2. Triángulo de Sierpinski	40
5.2.1. Cálculo de la dimensión del triángulo de Sierpinski	41
5.3. Curva de Koch	41
5.3.1. Construcción de la curva de Koch	41
5.3.2. Cálculo de la dimensión de la curva de Koch.	43
5.4. Conjuntos de Julia	44
5.4.1. Conjunto de Julia para la familia cuadrática	45
5.4.2. Algoritmos para el cómputo del conjunto de Julia	46
5.4.3. Ejemplos de conjuntos de Julia	47

Capítulo 1

Introducción

En este trabajo intentaremos ahondar en la teoría matemática que engloba a una familia de conjuntos muy singular, los fractales. La principal característica de estos es, que viven en una dimensión no entera. Por ejemplo, la recta y el plano real viven en las dimensiones 1 y 2, sin embargo, un conjunto perteneciente a esta familia, como puede ser el conjunto de Cantor, que posteriormente trataremos, vive en una dimensión $\frac{\lg(2)}{\lg(3)}$, siendo este obviamente un número no entero. Aunque no todos los fractales viven en dimensiones no enteras, como es el caso de la curva de Peano.

El matemático al que se le atribuyen más logros como divulgador de la geometría fractal es Benoît Mandelbrot. Él definió lo que era un fractal.

Definición 1 En sus trabajos, Mandelbrot definió un fractal como un conjunto cuya dimensión de Hausdorff es estrictamente mayor que su dimensión topológica.

Los capítulos 2 y 4, están dedicados a la dimensión topológica y de Hausdorff respectivamente.

Aunque no fué el único en el desarrollo de esta teoría, otros personajes anteriores a él, como Karl Weierstrass, Georg Cantor, Felix Hausdorff, Gaston Julia, Pierre Fatou y Paul Lévy, tienen trabajos muy relevantes en el desarrollo de esta teoría.

En el siglo XIX, las matemáticas se centraron en funciones que producían curvas suaves. Se creía que cualquier función produciría ciertamente tal curva. pero a finales de ese siglo empezaron a aparecer conjuntos que rompían con esa tónica. Por ejemplo, en 1872, Karl Weierstrass, presentó a la Real Academia de Ciencias Prusiana una función (la función de Weierstrass), con la siguiente forma, $a \in \mathbb{N}$ y $0 < b < 1$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} b^n \cos(a^n x \pi),$$

Esta función rompía con el pensamiento de la época ya que aún siendo convergente no era derivable en ningún punto, y su gráfica hoy en día es considerada un fractal.

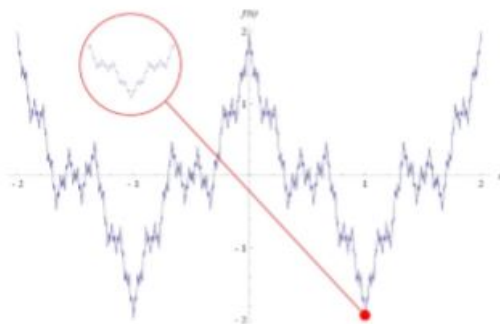


Figura 1.1: Gráfica de la función de Weierstrass.

En 1883 Georg Cantor, quien había estudiado los trabajos de Weierstrass, durante su etapa en la universidad de Berlín, introdujo una nueva función ψ cuya derivada vale 0 en todos los puntos menos en los pertenecientes al denominado conjunto de Cantor, que estudiaremos más detenidamente en el capítulo 5, el cual ahora también es considerado un fractal. En 1890, Peano, motivado por encontrar una función continua entre el intervalo $[0, 1]$ y el cuadrado $[0, 1] \times [0, 1]$, encontró una curva que pasa por todos los puntos del cuadrado. Este es un ejemplo bastante interesante ya que su dimensión topológica es 1, pero su dimensión de Hausdorff es 2, por lo que cumple con la definición de fractal de Mandelbrot.

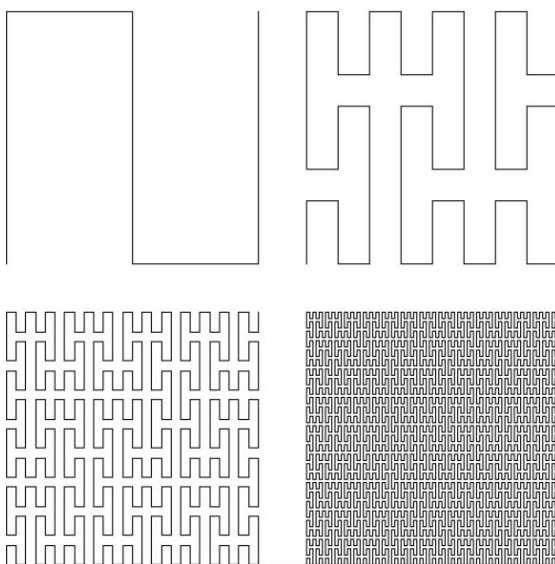


Figura 1.2: Aproximaciones de la curva de Peano

En marzo de 1918 Felix Hausdorff publicó una teoría sobre la dimensión que lleva su nombre, lo cual fue una de las claves para el estudio de los fractales, ya que permitía a los conjuntos vivir en dimensiones no enteras, siendo también este concepto imprescindible para la definición de fractal de Mandelbrot (definición 1). (Referencia bibliográfica a la obra de Hausdorff en [6].

Casi al mismo tiempo de que Hausdorff publicara sus resultados, dos matemáticos franceses, Gaston Julia y Pierre Fatou, estudiaron la iteración de funciones en el plano complejo, con sus puntos atractores y repulsores, conceptos que son muy importantes en la teoría del caos. Se dieron cuenta que, las fronteras de atracción de los puntos fijos atractores, formaban conjuntos bastante complejos, lo que a día de hoy también conocemos como fractales y denominamos conjuntos de Julia.

En 1977, con la publicación de su libro "The fractal geometry of nature", Benoit Mandelbrot popularizó a este tipo de conjuntos, hablando de temas como los fractales en la naturaleza y la geometría fractal de las galaxias.

Ahora, me gustaría responder a una pregunta. ¿Son estos conjuntos reales o son un simple producto del desarrollo teórico?

Para hacer este análisis nos centraremos en la idea de autosemejanza. Si observamos el mundo vegetal, más concretamente un árbol, veremos la idea de autosemejanza reflejada en él. Cada árbol está formado por ramas, y cada rama es un árbol en potencia. Nunca podremos ver un árbol íntegramente autosemejante, ya que para que esto ocurriera se necesitaría un tiempo infinito en el que el árbol creciera, y esto es imposible. Pero si dibujáramos un árbol con sus infinitas ramas en potencia de crecimiento, con un tamaño inversamente proporcional al tiempo que le costará a la rama aparecer, esa estructura, que recuerda un poco a la curva de Koch, con infinitas ramas infinitamente pequeñas, sería un fractal.

Parece ser, por los ejemplos que hemos visto, que si desde una dimensión entera queremos observar un objeto viviendo en una dimensión fractal, tenemos que pasar por la idea de infinito. Todos los ejemplos están contruidos como límites en el infinito, y nuestros cerebros no están preparados para comprender íntegramente el infinito, somos limitados.

Este trabajo está dividido en 5 capítulos, introducción, medida de Hausdorff, autosemejanza, dimensión topológica y ejemplos.

En la introducción hemos tratado el contexto histórico en el que se desarrollo toda esta teoría. Nos hemos seguido de las siguientes referencias, [10] y [4].

En el capítulo segundo, de medida y dimensión de Hausdorff, primero introduciremos los objetos matemáticos necesarios para el correcto desarrollo del tema, tales como, medida exterior o σ -álgebra. Construiremos la medida de Hausdorff y entonces seremos

capaces de definir y caracterizar la dimensión de Hausdorff. Para este capítulo hemos usado las siguientes referencias bibliográficas, [1], [5] y [7].

El tercer capítulo está íntegramente dedicado a una característica clave de los fractales, la autosemejanza, teorizaremos sobre este concepto, veremos que es el valor de semejanza y lo relacionaremos con la dimensión de Hausdorff, lo cual nos dará una forma fácil de calcular dicha dimensión. Para este capítulo hemos usado las siguientes referencias bibliográficas, [7] y [4].

En el cuarto capítulo, dimensión topológica, primero introduciremos el concepto de, orden de una familia de conjuntos, lo que nos llevará a definir y caracterizar la dimensión de cubrimientos. Y por último veremos que ésta siempre será menor o igual que la dimensión de Hausdorff. Para este capítulo hemos usado las siguientes referencias bibliográficas, [7], [8] y [2].

Por último el quinto capítulo está dedicado a analizar ejemplos de conjuntos fractales. Concretamente se analizarán: el conjunto de Cantor, el triángulo de Sierpinski, la curva de Koch y los denominados como Conjuntos de Julia. Para este capítulo hemos usado las siguientes referencias bibliográficas, [7], [4], [9] y [3].

Capítulo 2

Medida y dimensión de Hausdorff

El objetivo de este capítulo es poder definir y caracterizar la dimensión de Hausdorff, para luego poder calcularla en diferentes conjuntos fractales. Para cumplir ese objetivo primero debemos tener claro el concepto de medida y ser capaces de construir la medida de Hausdorff.

2.1. Preliminares

Definición 2 Sea X un conjunto arbitrario, Σ una colección de subconjuntos de X . Se dice que Σ es una σ -álgebra en X si:

1. $\emptyset \in \Sigma$.
2. $A \in \Sigma \implies A^c \in \Sigma$.
3. $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subseteq \Sigma \implies \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \in \Sigma$.

Al par (X, Σ) se le llama espacio medible.

Definición 3 Sea X un conjunto arbitrario. $\mathcal{A}_0 \subseteq \mathcal{P}(X)$, se le dice semianillo, si cumple:

1. $A, B \in \mathcal{A}_0 \implies A \cap B \in \mathcal{A}_0$.
2. $A, B \in \mathcal{A}_0 \implies \exists \{A_i\}_{i=1}^k$ t.q. $A - B = \bigcup_{i=1}^k A_i$.

Definición 4 Sea (X, Σ) un espacio medible. Una medida positiva sobre un semianillo, $\mathcal{A}_0 \subseteq \mathcal{P}(X)$, es una función, $\mu : \mathcal{A}_0 \mapsto [0, \infty]$, tal que,

1. $\mu(\emptyset) = 0$.
2. Si $\{A_i\}_{i=1..n}$ son disjuntos dos a dos y su unión se encuentra en el semianillo, entonces:

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n \mu(A_i).$$

Notar que la estructura de semianillo no garantiza que la unión de dos elementos del semianillo esté en el semianillo.

Definición 5 Sea (X, Σ) un espacio medible. Una medida positiva en este espacio es una función, $\mu : \Sigma \mapsto [0, \infty]$, tal que,

1. $\mu(\emptyset) = 0$.
2. Si $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}}$, son disjuntos dos a dos, entonces, $\mu(\cup_{i \in \mathbb{N}} A_i) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \mu(A_i)$.

A la terna (X, Σ, μ) se le llama espacio de medida. Y este es completo sii:

$$\forall B \in \Sigma, \mu(B) = 0 \quad \Rightarrow \quad \forall A \in \Sigma \wedge A \subset B, \mu(A) = 0.$$

Frecuentemente, hay definida una medida μ sobre una pequeña familia de conjuntos, y queremos extenderla a una familia más grande de conjuntos. Esta situación motiva la definición de medida exterior.

Definición 6 Sea X y el conjunto de partes de X , $\mathcal{P}(X)$, una medida exterior en X es una función del tipo:

$$\mu^* : \mathcal{P}(X) \mapsto [0, \infty].$$

Tal que:

1. $\mu^*(\emptyset) = 0$.
2. Si $A \subseteq B \Rightarrow \mu^*(A) \leq \mu^*(B)$.
3. Si $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de subconjuntos, entonces $\Rightarrow \mu^*(\cup_{i \in \mathbb{N}} A_i) \leq \sum_{i \in \mathbb{N}} \mu^*(A_i)$.

Proposición 1 Sea $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(X)$, $\emptyset \in \mathcal{C}$ y $\rho : \mathcal{C} \rightarrow [0, \infty]$, tal que, $\rho(\emptyset) = 0, \forall B \subseteq X$. Se define:

$$\mu^*(B) := \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \rho(A_n) : A_n \in \mathcal{C}, B \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right\}.$$

Entonces:

1. μ^* es una medida exterior tal que, $\forall A \in \mathcal{C}, \mu^*(A) \leq \rho(A)$. A la que la llamaremos medida exterior generada por ρ .
2. Si \mathcal{C} es un semianillo y ρ una medida generada por el semianillo, ρ y μ^* coinciden en \mathcal{C} .

Teorema de extensión de Caratheodory

Notar que una medida exterior no tiene restricciones en cuanto a los subconjuntos sobre los que está definida, mientras que la medida positiva necesitaba estar definida sobre una σ -álgebra. Aunque la medida exterior es más débil que la positiva en el sentido de que no es numeráblemente aditiva. Ahora el objetivo es encontrar una σ -álgebra donde las medidas exteriores sí sean numeráblemente aditivas.

Definición 7 Sea μ^* una medida exterior en X . $A \subseteq X$, diremos que es μ^* -medible, si $\forall B \subseteq X$,

$$\mu^*(B) = \mu^*(B \cap A) + \mu^*(B \cap A^c). \quad (2.1)$$

Denotaremos M_{μ^*} , a la familia de conjuntos μ^* -medibles.

Teorema 1 (De extensión de Caratheodory) Sea X un conjunto y μ^* una medida exterior en X . Entonces:

1. M_{μ^*} es una σ -álgebra.
2. La restricción de μ a M_{μ^*} es una medida.
3. (X, M_{μ^*}, μ^*) es completo.
4. Si μ^* es la medida exterior generada por la medida sobre un semianillo ρ de un semianillo $\mathcal{A}_0 \Rightarrow \mathcal{A}_0 \subset M_{\mu^*}$.

Teorema 2 (Teorema de Hahn) Toda medida σ -finita en un semianillo \mathcal{A}_0 , se extiende de forma única a cada σ -álgebra, entre \mathcal{A}_0 y M_{μ^*} .

Ejemplo 1 (Medida de Lebesgue en \mathbb{R}) Sea $\mathcal{C} = \{(a, b] : a \leq b\}$ y $\rho(a, b] = b - a$.

Veamos que \mathcal{C} cumple las propiedades de semianillo:

1. Dados dos intervalos semiabiertos A, B . Su intersección o es vacía, o es otro intervalo semiabierto.
2. La resta de intervalos semiabiertos, es la unión disjunta de intervalos semiabiertos.

Se puede ver que ρ es una medida sobre el semianillo. Ahora definamos la medida exterior de Lebesgue:

$$m^*(A) = \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} (b_n - a_n) : a_n \leq b_n \in \mathbb{R}, A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} (a_n, b_n] \right\},$$

que es una medida exterior.

Por el teorema de Caratheodory, sabemos que si restringimos la medida exterior a la σ -álgebra de los medibles, tenemos una medida, y además, al estar generada por la medida ρ del semianillo de los intervalos semiabiertos, estos mismos son conjuntos medibles.

Ya que los conjuntos abiertos se pueden expresar como uniones numerables de intervalos semiabiertos, se tiene que la medida de Lebesgue mide a los abiertos, por lo tanto mide a la menor σ -álgebra que los contiene, los Borelianos.

2.2. Construcción de la medida de Hausdorff

Definición 8 Sea un espacio métrico (X, d) , $A \subset X$, el diámetro de A se define como:

$$\text{diam}(A) = \sup_{x, y \in A} \{d(x, y) : x, y \in A\}.$$

Para $\delta > 0$ y $t > 0$, definamos una función de conjunto. $H_\delta^t : \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathbb{R}$, que tiene como valor:

$$H_\delta^t(A) = \inf \left\{ \sum_{i \in \mathbb{N}} \text{diam}(U_i)^t : A \subset \bigcup_{i \in \mathbb{N}} U_i, \text{diam}(U_i) < \delta \right\}. \quad (2.2)$$

Observemos que la única restricción que tienen los conjuntos que cubren a A es el diámetro.

Gracias a la proposición 1, las anteriores funciones son medidas exteriores. Observemos que cuando $\delta < \epsilon$,

$$\begin{aligned} & \inf \left\{ \sum_{i \in \mathbb{N}} \text{diam}(U_i)^t : A \subset \bigcup_{i \in \mathbb{N}} U_i, \text{diam}(U_i) < \delta \right\} \\ & \geq \inf \left\{ \sum_{i \in \mathbb{N}} \text{diam}(U_i)^t : A \subset \bigcup_{i \in \mathbb{N}} U_i, \text{diam}(U_i) < \epsilon \right\}. \end{aligned}$$

Observemos que si $\delta < \epsilon$, la familia de conjuntos con diámetro menor que δ está contenida en la familia de conjuntos con radio menor que ϵ . Por lo tanto, al ser una familia más grande, el ínfimo será menor para la familia de conjuntos con radio menor que ϵ . Por lo tanto:

$$H_\delta^t(A) > H_\epsilon^t(A). \quad (2.3)$$

Definición 9 Llamamos medida exterior t -dimensional de Hausdorff, H^t , a,

$$H^t = \lim_{\delta \rightarrow 0} H_\delta^t. \quad (2.4)$$

Proposición 2 La medida exterior t -dimensional de Hausdorff es una medida exterior.

Demostración:

Comprobemos que H^t cumple con la definición de medida exterior, partiendo de que H_δ^t lo es.

1.

$$H^t(\emptyset) = \lim_{\delta \rightarrow 0} H_\delta^t(\emptyset) = \lim_{\delta \rightarrow 0} 0 = 0.$$

2.

$$A \subseteq B \Rightarrow H_\delta^t(A) \leq H_\delta^t(B).$$

Entonces, por la regla del sandwich, sabemos que:

$$\text{Si } \lim_{\delta \rightarrow 0} H_\delta^t(A) \leq \lim_{\delta \rightarrow 0} H_\delta^t(B) \Rightarrow H^t(A) \leq H^t(B).$$

3. Subaditividad. Sabemos que:

$$H^t\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i\right) = \lim_{\delta \rightarrow 0} H_\delta^t\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i\right) \leq \lim_{\delta \rightarrow 0} \sum_{i \in \mathbb{N}} H_\delta^t(A_i).$$

Por (2.3) y sabiendo que, $0 \leq \delta$, se tiene:

$$\sum_{i \in \mathbb{N}} H_\delta^t(A_i) \leq \sum_{i \in \mathbb{N}} H^t(A_i).$$

Por lo tanto, llegamos a la conclusión de:

$$H^t\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i\right) \leq \sum_{i \in \mathbb{N}} H^t(A_i).$$

■

De acuerdo con el teorema de Caratheodory, sabemos que si restringimos la medida exterior de Hausdorff a la familia de sus conjuntos medibles, obtenemos una medida. Veamos ahora que los borelianos están contenidos en M_{H_p} , los conjuntos medibles por la medida de Hausdorff.

Definición 10 Sea (X, d) , un espacio métrico. Diremos que una medida exterior μ^* es métrica si dados $A, B \subset X$ tales que $d(A, B) \geq 0$, la medida exterior de la unión es la suma de medidas exteriores.

Proposición 3 Si μ^* es una medida exterior métrica en un espacio métrico (X, d) , entonces:

$$\mathcal{B}(X) \subset M_{\mu^*}.$$

Demostración:

Basta demostrar que todos los abiertos en X son conjuntos μ^* -medibles, es decir si U es abierto, $\forall A \subseteq X$,

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap U) + \mu^*(A \cap U^c).$$

Sea A tal que $\mu^*(A) < \infty$. Probaremos que,

$$\mu^*(A) \geq \mu^*(A \cap U) + \mu^*(A \cap U^c),$$

ya que, $\mu^*(A) \leq \mu^*(A \cap U) + \mu^*(A \cap U^c)$ es una propiedad de la medida exterior, y el caso para infinito es trivial.

Definamos la familia de conjuntos:

$$U_n = \{x \in X : d(x, U^c) \geq \frac{1}{n}\}.$$

Es trivial que:

$$A \supseteq (A \cap U_n) \cup (A \cap U^c),$$

ya que la unión de dos subconjuntos de A está en A .

Notemos que al ser U abierto, $U_n \uparrow U$. Por lo tanto, $A \cap U_n \uparrow A \cap U$ y:

$$d(A \cap U_n, A \cap U^c) \geq d(U_n, U^c) \geq \frac{1}{n} > 0.$$

Por lo tanto se tiene que $A \cap U_n$ y $A \cap U^c$ son conjuntos disjuntos. De esto y de la definición de medida exterior y de medida exterior métrica deducimos que:

$$\forall n, \mu^*(A) \geq \mu^*((A \cap U_n) \cup (A \cap U^c)) = \mu^*(A \cap U_n) + \mu^*(A \cap U^c). \quad (2.5)$$

Si consideramos la familia de conjuntos

$$B_n = A \cap U_n \uparrow B = A \cap U,$$

por (2.5), basta demostrar que $\mu^*(B_n) \uparrow \mu^*(B)$.

Sea la familia de conjuntos disjuntos

$$C_1 = B_1, \quad n \geq 2, \quad C_n = B_n - B_{n-1}.$$

Entonces,

$$\begin{aligned} B = B_n \cup \bigcup_{i=n}^{\infty} C_i &\Rightarrow \mu^*(B) = \mu^*(B_n \cup \bigcup_{i=n+1}^{\infty} C_i) \leq \mu^*(B_n) + \sum_{i=n+1}^{\infty} \mu^*(C_i) \\ &\Rightarrow \mu^*(B) - \mu^*(B_n) \leq \sum_{i=n+1}^{\infty} \mu^*(C_i). \end{aligned}$$

Por lo tanto, ahora tenemos que ver que: $\sum_{i=n}^{\infty} \mu^*(C_i) \mapsto 0$, así que basta demostrar que: $\sum_{i=0}^{\infty} \mu^*(C_i)$ converge.

Sea ahora $y \in C_{n+1}$. Entonces $y \notin U_n$, es decir, $d(y, U^c) < \frac{1}{n}$.

Sea ahora $x \in B_{n-1}$. Se tiene que $d(x, U^c) \geq \frac{1}{n-1}$.

Despejando tenemos que:

$$d(x, y) \geq \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} = \frac{1}{n(n-1)},$$

tomando ínfimo,

$$d(C_{n+1}, B_{n-1}) \geq \frac{1}{n(n-1)} > 0.$$

Ahora, de las definiciones de medida exterior y de medida exterior métrica y por (2.2),

$$\mu^*(B_{n-1}) + \mu^*(C_{n+1}) = \mu^*(B_{n-1} \cup C_{n+1}) \leq \mu^*(B_{n+1}),$$

de modo que:

$$\mu^*(C_{n+1}) \leq \mu^*(B_{n+1}) - \mu^*(B_{n-1}),$$

$$\mu^*(C_1) + \mu^*(C_3) + \dots + \mu^*(C_{2n-1}) \leq \mu^*(B_1) + (\mu^*(B_3) - \mu^*(B_1)) + \dots = \mu^*(B_{2n-1}).$$

Haciendo lo propio para los pares e impares:

$$\sum_{i=1}^n \mu^*(C_{2i-1}) \leq \mu^*(B_{2n-1}) \leq \mu^*(A),$$

$$\sum_{i=1}^n \mu^*(C_{2i}) \leq \mu^*(B_{2n}) \leq \mu^*(A).$$

Como por hipótesis $\mu^*(A) \leq \infty$, la serie $\sum \mu^*(C_n)$ converge. ■

Teorema 3 $H^t : \mathcal{P}(X) \longrightarrow [0, \infty]$ es una medida exterior métrica.

Demostración:

Sean A, B t.q. $d(A, B) > 0$. Ahora sea $d(A, B) > \delta > 0$.

Sea una sucesión de conjuntos,

$$\{C_n\}_{n \in \mathbb{N}} : \text{diam}(C_n) < \delta, \quad A \cup B \subset \bigcup C_n.$$

Ahora, notar que al tomar δ mayor que el máximo diámetro de los C_n 's, es imposible que un C_n interseque al mismo tiempo, con A y B , ya que la distancia entre A y B , es mayor que el diámetro de estos conjuntos. Teniendo este concepto en cuenta, definamos dos familias de índices disjuntas:

$$I = \{i \in \mathbb{N} : C_i \cap A \neq \emptyset\}, \quad J = \{j \in \mathbb{N} : C_j \cap B \neq \emptyset\}.$$

Se cumple que $A \subseteq \bigcup_{i \in I} C_i$ y $B \subseteq \bigcup_{j \in J} C_j$. Ya que H_δ^t está definida sobre el ínfimo de los cubrimientos y hemos tomado uno cualquiera:

$$H_\delta^t(A) + H_\delta^t(B) \leq \sum_{i \in I} (\text{diam}(C_i))^t + \sum_{j \in J} (\text{diam}(C_j))^t \leq \sum_{i \in \mathbb{N}} (\text{diam}(C_i))^t.$$

Ahora tomando ínfimo,

$$H_\delta^t(A) + H_\delta^t(B) \leq \inf \sum_{i \in \mathbb{N}} (\text{diam}(C_i))^t = H_\delta^t(A \cup B).$$

Por la definición de medida exterior:

$$H_\delta^t(A \cup B) \leq H_\delta^t(A) + H_\delta^t(B).$$

Y por lo tanto, concluimos que:

$$H_\delta^t(A \cup B) = H_\delta^t(A) + H_\delta^t(B).$$

■

Por lo tanto, ya hemos llegado a la conclusión de que la medida exterior de Hausdorff restringida a sus medibles es una medida positiva, y que los Borelianos son conjuntos H^t -medibles.

2.3. Caracterización de la dimensión de Hausdorff

El siguiente resultado nos dará pie a poder definir la dimensión de Hausdorff, así como el poder asegurar su existencia.

Teorema 4 Sea $A \subset X$ y sean, $0 \leq p < q$. Entonces se tiene que:

1.

$$\text{Si } H^p(A) < \infty \Rightarrow H^q(A) = 0.$$

2.

$$\text{Si } H^q(A) > 0 \Rightarrow H^p(A) = \infty.$$

Demostración:

Basta con probar sólo la primera sentencia, ya que la segunda es la contrarecíproca de la primera, es decir si la primera fuera $(A \Rightarrow B)$, se tiene que, la segunda sería,

$$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\overline{B} \Rightarrow \overline{A}).$$

Ya que la medida de Hausdorff es una función positiva, se tiene que negar que $H_q(A) = 0$, es decir que $H_q(A) > 0$, y negar que $H_p(A) < \infty$, es decir que $H_p(A) = \infty$.

Ahora, probaremos la primera sentencia. Sea $A \subseteq X$, con $H^p(A) < \infty$, $\delta > 0$ y B_n un cubrimiento de A con $\text{diam}(B_n) < \delta$, se tiene que:

$$H_\delta^q(A) \leq \sum \text{diam}(B_n)^q,$$

y ya que:

$$\text{diam}(B_n)^q = \text{diam}(B_n)^p \text{diam}(B_n)^{q-p} \leq \text{diam}(B_n)^p \delta^{q-p},$$

se tiene que:

$$H_\delta^q(A) \leq \sum \text{diam}(B_n)^q < \delta^{q-p} \sum \text{diam}(B_n)^p.$$

Ahora tomando el ínfimo, se tiene que, $H_\delta^q(A) \leq \delta^{q-p} H_\delta^p(A)$. Ahora si hacemos δ tender a 0, $H^p(A) = 0$. ■

Definición 11 De este teorema deducimos que existe un valor crítico $s_0 \in [0, \infty]$, tal que :

1. $\forall s < s_0, \quad H^s(A) = \infty,$
2. $\forall s > s_0, \quad H^s(A) = 0.$

A este valor s_0 le llamaremos la dimensión de Hausdorff del conjunto A . Denotaremos $\dim(A) = s_0$.

Nota 1 Si para todo s mayor que 0, $H^s(A) = 0$, entonces $\dim(A) = 0$, y si para todo s mayor que 0 también, $H^s(A) = \infty$, entonces $\dim(A) = \infty$.

2.3.1. Teorema del contenido

Teorema 5 (Teorema del contenido) Sean A, B , conjuntos Borelianos, entonces si $A \subseteq B$, se tiene que:

$$\dim(A) \leq \dim(B).$$

Demostración:

Supongamos que $A \subseteq B$. Veamos entonces que $\dim(A) \leq \dim(B)$. La dimensión de Hausdorff de B es ese valor s_0 tal que $\forall s > s_0$ la medida de Hausdorff de B es 0. Sea $s > s_0$, entonces:

$$H^s(A) \leq H^s(B) = 0.$$

Por lo tanto, $\dim(A) \leq \dim(B)$. ■

2.3.2. Teorema de la unión

Teorema 6 (Teorema de la unión) Sean A, B conjuntos Borelianos, entonces

$$\dim(A \cup B) = \max\{\dim(A), \dim(B)\}.$$

Demostración:

Por el teorema 5 sabemos que $\dim(A \cup B) \geq \max\{\dim(A), \dim(B)\}$. Por lo tanto hay que probar que $\dim(A \cup B) \leq \max\{\dim(A), \dim(B)\}$.

Sea $s > \max\{\dim(A), \dim(B)\}$. Por lo tanto, $H^s(A) = 0$ y $H^s(B) = 0$. Entonces,

$$H^s(A \cup B) \leq H^s(A) + H^s(B) = 0.$$

Por lo tanto, $\forall s > \max\{\dim(A), \dim(B)\}, \dim(A \cup B) \leq s$. Así que:

$$\dim(A \cup B) \leq \max\{\dim(A), \dim(B)\}.$$

■

Capítulo 3

Autosemejanza

En este capítulo vamos a trabajar una característica fundamental de los fractales, la autosemejanza. Veremos como calcular la dimensión de autosemejanza de un conjunto, lo que luego será un método sencillo para calcular la dimensión de Hausdorff. Para el desarrollo de este capítulo nos hemos basado en la cita bibliográfica [7].

Definición 12 Una semejanza (o similitud) es una aplicación entre dos espacios métricos (X_1, d_1) y (X_2, d_2) que modifica las distancias entre dos puntos cualesquiera multiplicándolas por un factor fijo, r . En el caso de los espacios euclídeos, por ejemplo, es la composición de una isometría y una homotecia. Intuitivamente, es una transformación que puede cambiar el tamaño y la orientación de una figura pero no altera su forma.

Una lista de radios es una lista finita de números positivos (r_1, r_2, \dots, r_n) . Si $\forall i \ r_i < 1$, la lista de radios se dice contractiva o hiperbólica.

Definición 13 En un espacio métrico (X, d) , un sistema de funciones iterado relativo a la lista de radios (r_1, r_2, \dots, r_n) , es una lista (f_1, f_2, \dots, f_n) con f_i una semejanza de radio $r_i > 0$.

Sea $K \subset X$. Se dice que K es invariante o atractor por el sistema de funciones iterado (f_1, f_2, \dots, f_n) si

$$K = \bigcup_{i=1}^n f_i(K).$$

Definición 14 El valor de semejanza de una lista de radios (r_1, r_2, \dots, r_n) es un número positivo s tal que:

$$\sum_{i=1}^n r_i^s = 1.$$

Teorema 7 Si (r_1, r_2, \dots, r_n) es una lista de radios contractiva, entonces existe un único valor de semejanza s . Se tiene que $s=0$ si $n=1$.

Al número s se le llama dimensión de semejanza de un conjunto K que sea invariante por un conjunto iterado de funciones relativo a la lista de radios (r_1, r_2, \dots, r_n) , es decir,

sea la lista de radios (r_1, r_2, \dots, r_n) tal que,

$$\sum_{i=1}^n r_i^s = 1.$$

Y sea la lista iterada de funciones relativa a ella, (f_1, f_2, \dots, f_n) , cada f_i es una semejanza con radio r_i , entonces si el conjunto K es invariante por (f_1, f_2, \dots, f_n) , es decir,

$$K = \bigcup_{i=1}^n f_i(K).$$

Entonces se dice que K tiene dimensión de semejanza s .

Intuitivamente la dimensión de semejanza, debería coincidir con la de Hausdorff, y ésta es única. Pero sin las caracterizaciones adecuadas el conjunto K puede admitir dos dimensiones de semejanza, así que ésta más que una característica del conjunto K , es una característica del conjunto iterado de funciones (f_1, f_2, \dots, f_n) .

Ejemplo 2 Veamos un ejemplo para comprobar que efectivamente un conjunto puede admitir más de una dimensión de semejanza.

Sea el intervalo $[0, 1]$. Este conjunto es invariante por las semejanzas, $f_1(x) = \frac{x}{2}$ y $f_2(x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{2}$, que tienen radio $\frac{1}{2}$ cada una. Ya que

$$2 * \frac{1}{2}^s = 1 \Leftrightarrow s = 1.$$

Se tiene que, según esta lista de funciones la dimensión de semejanza de $[0, 1]$, es 1.

En cambio, si ahora tomamos las semejanzas $f_3(x) = \frac{2x}{3}$ y $f_4(x) = \frac{2x}{3} + \frac{1}{3}$, igualmente $[0, 1]$ es invariante por la lista de funciones, pero en este caso la dimensión de semejanza sale mayor que 1, $s = 1,7095\dots$

De este ejemplo podemos intuir, que habrá que evitar el solapamiento de los conjuntos imagen.

Definición 15 Se dice que el sistema iterado de funciones (f_1, f_2, \dots, f_n) cumple la condición de conjunto abierto de Moran, si y solo si, existe un conjunto abierto, no vacío U tal que:

$$\text{Si } i \neq j, \quad f_i(U) \cap f_j(U) = \emptyset, \quad \text{y } \forall i, \quad f_i(U) \subseteq U.$$

Si ese conjunto abierto U existe, se le llama conjunto abierto de Moran para el sistema iterado de funciones.

Teorema 8 Sea $(r_e)_{e \in E}$ una lista de radios contractivos. Sea s su valor de similaridad y $(f_e)_{e \in E}$ su sistema iterado de funciones asociado en \mathbb{R} . Sea K el conjunto invariante para el sistema iterado de funciones.

Si se satisface la función de conjunto abierto, la dimensión de Hausdorff de K es igual a s , $\dim(K)=s$.

Demostración:

La demostración de este teorema se encuentra en el libro [7], es el teorema 6.5.4, en la página 193. ■

No siempre se puede calcular la dimensión de Hausdorff mediante autosemejanza, puede que el sistema iterado de funciones no cumpla la condición de conjunto abierto o no todos los conjuntos son invariantes por un sistema iterado de funciones, como el círculo.

Capítulo 4

Dimensión topológica

Para este capítulo, todos los espacios que consideremos serán espacios métricos. Los conjuntos de la geometría elemental llevan asociados una dimensión. Por ejemplo, puntos aislados tienen dimensión 0, curvas 1, superficies 2. En este capítulo trataremos la dimensión como una propiedad topológica, es decir, si dos conjuntos son topológicamente homeomorfos tendrán igual dimensión topológica.

4.1. Orden de una familia de conjuntos

Definición 16 Para un $n \in \mathbb{Z}$ con $n \geq -1$. El orden de una familia de conjuntos distintos \mathcal{A} será menor o igual que n , si cualquiera $n+2$ conjuntos de la familia tienen intersección vacía.

Se dice que \mathcal{A} tiene orden exactamente $n \geq 0$ si tiene orden menor o igual que n pero no menor o igual que $n-1$.

Nota 2 Se dice que una familia de conjuntos \mathcal{A} tiene orden exáctamente -1 si tiene orden $n \geq -1$.

Nota 3 Una familia de conjuntos \mathcal{A} tendrá orden ∞ si $\forall n \in \mathbb{N}$ existen n conjuntos distintos pertenecientes a la familia \mathcal{A} , con intersección distinta del vacío. Es decir:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \exists A_i \in \mathcal{A}, i = 1, \dots, n : \bigcap_{i=1}^n A_i \neq \emptyset.$$

Ejemplo 3 Para entender mejor la definición de orden de una familia de conjuntos, fijémosnos en la figura 4.1 y veamos cuál es su orden.

Supongamos que cada ladrillo y su frontera son un conjunto de la familia, entonces la familia de ladrillos ¿tendrá orden menor o igual que 1? Obviamente no, ya que existen grupos de 3 ladrillos que intersecan en un punto dentro de la familia. ¿Y orden menor o igual que 2?

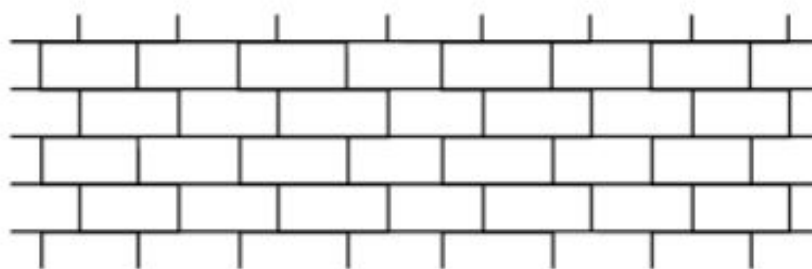


Figura 4.1: Ladrillos

Sí, ya que cualquier grupo de 4 ladrillos que tomemos dentro de la familia tiene intersección vacía. Por lo tanto, ya que los ladrillos de la figura 4.1 tiene orden menor o igual que dos pero no menor o igual que uno, la familia tiene orden 2.

El concepto de orden de un conjunto va a ser muy importante en el desarrollo del trabajo, ya que es algo estrechamente ligado con la dimensión topológica. Veamos otro ejemplo para afianzar el entendimiento de esta idea.

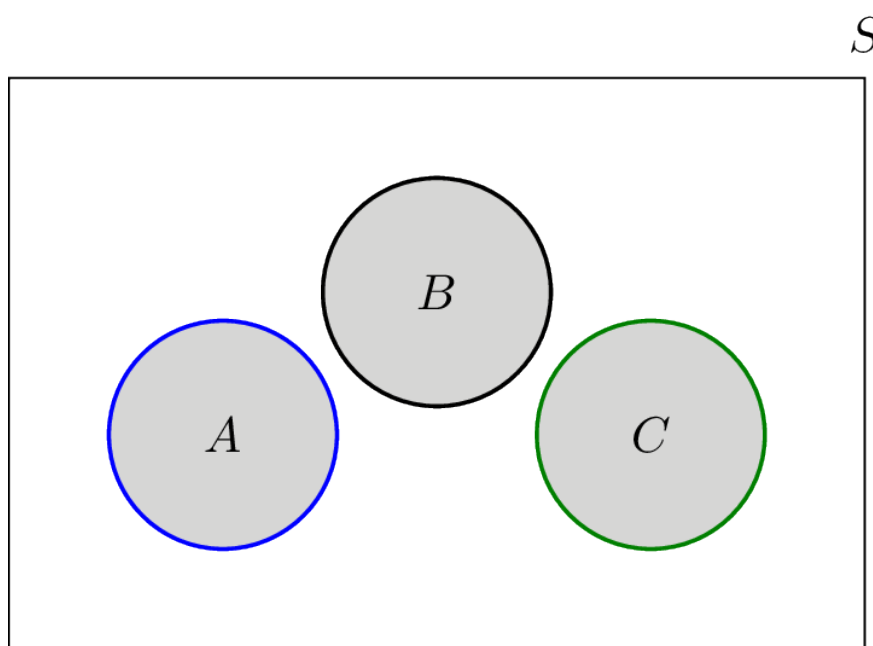


Figura 4.2: Familia de conjuntos disjuntos

Ejemplo 4 *En la figura 4.2 podemos apreciar una familia de 3 conjuntos disjuntos A, B, C , sobre un espacio S . ¿Cuál será el orden de esta familia? Démonos cuenta que al ser conjuntos disjuntos cualesquiera 2 conjuntos que tomemos de la familia tienen intersección vacía, por*

lo tanto el orden de esta familia será menor o igual que cero. ¿Puede ser menor o igual que -1? No, ya que cualquiera conjunto de la familia que coja (A, B o C), su intersección consigo mismo es distinto del vacío. Por lo tanto, el orden de una familia de conjuntos disjuntos es 0.

4.2. Espacios de dimensión cero

Esta sección estará dedicada a entender un poco mejor y caracterizar brevemente los espacios de dimensión cero.

Antes de nada, será indispensable para el desarrollo de la teoría que sigue, conocer el concepto de cubrimiento.

Definición 17 Se dice que una familia de conjuntos \mathcal{A} es un cubrimiento del espacio métrico S , que \mathcal{A} cubre a S , si y solo si S está contenido en la unión de todos los elementos de \mathcal{A} .

Definición 18 Sean \mathcal{A} y \mathcal{B} dos colecciones de conjuntos. Entonces se dice que \mathcal{B} está subordinado a \mathcal{A} si y solo si:

$$\forall B \in \mathcal{B}, \quad \exists A \in \mathcal{A}: \quad B \subseteq A.$$

Si \mathcal{A} es un cubrimiento abierto del espacio métrico S , un refinamiento de \mathcal{A} es un cubrimiento abierto \mathcal{B} de S que es subordinado a \mathcal{A} .

Definición 19 Sea un espacio métrico S . $A \subseteq S$ es un conjunto clopen si es cerrado y abierto al mismo tiempo. En particular, S y \emptyset son conjuntos clopen.

Definición 20 Sea el espacio métrico S . Una partición clopen de S se le dice a una familia de conjuntos en cuya unión está contenido S , son disjuntos dos a dos (partición) y cada uno de ellos es clopen.

Definición 21 Un espacio S es de dimensión cero si y solo si todo cubrimiento abierto y finito de S tiene un refinamiento que es una partición clopen.

En la siguiente sección veremos la relación que existe entre los conceptos de orden de una familia de conjuntos y de dimensión topológica (dimensión de cubrimientos).

4.3. Dimensión de cubrimientos

Sea S un espacio métrico, y n un número entero ≥ -1 . Se dice que S tiene dimensión de cubrimiento menor o igual que n si y solo si todo cubrimiento con cardinal finito de S posee un refinamiento de orden menor o igual que n .

La dimensión de cubrimiento de S será exactamente n , para $n \geq 0$ si y solo si es menor o igual que n pero no menor o igual que $n-1$. Se escribe $\text{Cov}(S)=n$.

Ésta también llamada dimensión de Lebesgue.

Nota 4 Al igual que pasaba con el orden de un conjunto, la dimensión de cubrimientos de un conjunto diremos que es exactamente igual a -1 si y solo si es menor o igual que -1 .

De las definiciones de orden de un conjunto y dimensión de cubrimientos, podemos deducir que:

$$\text{Cov}(S) = -1 \iff S = \emptyset \vee S = \{\emptyset\}.$$

$\text{Cov}(S) = 0 \iff S$ es un espacio de dimensión cero ya que se puede cubrir por una partición de conjuntos disjuntos dos a dos, que además estos conjuntos serán clopen en S .

A continuación, los siguientes resultados nos servirán como herramienta para probar los teoremas de suma y contenido de dimensión de cubrimientos.

Nota 5 Sean F cerrado, U un abierto y $F \subseteq U$, entonces:

$$\exists V : F \subseteq V \subseteq \overline{V} \subseteq U,$$

con V abierto

Este resultado, nota 5, fue visto en la asignatura de topología, por lo que prescindiremos de demostración.

Teorema 9 Sea S un espacio métrico y n un número entero ≥ -1 . Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. $\text{Cov}(S) \leq n$.
2. Si $\mathcal{U} = \{U_1, U_2, \dots, U_k\}$ es un cubrimiento abierto y finito de S entonces existe un cubrimiento $\mathcal{B} = \{B_1, B_2, \dots, B_k\}$ que refina a \mathcal{U} , tal que $U_i \supseteq B_i$, $i = 1, \dots, k$, tiene su mismo número de elementos y cubre a S con orden menor o igual que n .
3. Si $\mathcal{U} = \{U_1, U_2, \dots, U_{n+2}\}$ es un cubrimiento abierto y finito de S , entonces existe un refinamiento de \mathcal{U} , $\mathcal{B} = \{B_1, B_2, \dots, B_{n+2}\}$, tal que $U_i \supseteq B_i$, $i = 1, \dots, n+2$, que también tiene $n+2$ elementos, sigue cubriendo a S y:

$$\bigcap_{i=1}^{n+2} B_i = \emptyset.$$

4. Si $\mathcal{U} = \{U_1, U_2, \dots, U_{n+2}\}$ es un cubrimiento abierto de S , entonces existen conjuntos cerrados $\{F_i \subseteq U_i\}_{i=1}^{n+2}$ que sigue cubriendo a S y:

$$\bigcap_{i=1}^{n+2} F_i = \emptyset.$$

Demostración:

(2) \Rightarrow (3) es claro ya que (2) es una generalización de (3), y (2) \Rightarrow (1) también por definición de dimensión de cubrimiento.

1. (1) \Rightarrow (2)

Supongamos que $\text{Cov}(S) \leq n$. Sea un cubrimiento abierto de S , $\mathcal{U} = \{U_1, \dots, U_k\}$.

Por definición de dimensión de cubrimientos, \mathcal{U} posee un refinamiento al que llamaremos \mathcal{W} que tiene orden $\leq n$. Ahora para probar (2), debemos ser capaces de construir uno, que lo haremos a partir de \mathcal{W} y con exactamente k elementos.

Fijémonos en que:

$$\forall W \in \mathcal{W}, \quad \exists U_i \in \mathcal{U} : W \subseteq U_i.$$

Definamos la familia de conjuntos \mathcal{B} de la siguiente forma :

$$B_i = \bigcup \{W \in \mathcal{W} : W \subseteq U_i\},$$

ya que \mathcal{W} cubría ya a S , los $B_i \subseteq U_i$ por como están contruidos, también cubren a S , además hemos restringido su cardinal a k . Ahora, ¿siguen teniendo orden $\leq n$? Supongamos que $x \in S$, x como mucho puede estar simultáneamente en $n+1$ elementos de \mathcal{W} y $x \in B_i$ sólo si $x \in W$ para algún $W \subseteq U_i$, por lo tanto x pertenece como mucho a $n+1$ B_i 's, lo que quiere decir que el orden de \mathcal{B} es n .

2. (3) \Rightarrow (2)

Supongamos que se cumple (3). Sea el cubrimiento abierto de S , $\{U_1, U_2, \dots, U_k\}$. Si $k \leq n+1$, entonces el cubrimiento ya tendría orden $\leq n$ y no habría nada que probar.

Supongamos entonces que $k \geq n+2$. Sea la familia de conjuntos $\{W_i\}_{i=1}^{n+2}$ definida como $W_i = U_i$, $i=1, \dots, n+1$ y $W_{n+2} = \bigcup_{i=n+2}^k U_i$. Ya que los U_i 's cubren a S , los W_i 's también lo cubren.

Por (3):

$$\forall i \quad \exists V_i \text{ abiertos} : \quad V_i \subseteq W_i, \quad \bigcap_{i=1}^{n+2} V_i = \emptyset, \quad \bigcup_{i=1}^{n+2} V_i = S.$$

Para probar (2) solo nos queda ajustar el número de elementos de $n+2$ a k . Para ello definiremos los B_i 's tales que:

$$B_i = V_i, \quad i = 1, \dots, n+1, \quad B_j = V_{n+2} \cap U_j, \quad j \geq n+2.$$

Entonces, por construcción, los B_i 's cumplen que:

$$\bigcap_{i=1}^k B_i = \emptyset, \quad \bigcup_{i=1}^k B_i = S \quad y \quad \forall i, B_i \subseteq U_i.$$

3. (3) \implies (4)

Supongamos cierto (3), es decir, dado el cubrimiento abierto de S :

$$\{U_1, U_2, \dots, U_{n+2}\}, \quad \forall i = 1, \dots, n+2, \quad \exists B_i \subseteq U_i :$$

$$\bigcap_{i=1}^{n+2} B_i = \emptyset \quad y \quad \bigcup_{i=1}^{n+2} B_i = S.$$

Con cada B_i conjunto abierto en S .

Dado que la unión de todos los B_i 's es S , se tiene que:

$$S \setminus B_1 \subseteq \bigcup_{i=2}^{n+2} B_i.$$

Ahora, usando la nota 5 y que la unión finita de conjuntos abiertos es a su vez un conjunto abierto, deducimos que $\exists V_1$ tal que:

$$S \setminus B_1 \subseteq V_1 \subseteq \overline{V_1} \subseteq \bigcup_{i=2}^{n+2} B_i.$$

Si definimos el conjunto $F_1 = S \setminus V_1$, podemos apreciar que cumple con las siguientes propiedades:

$$S \setminus B_1 \subseteq V_1 \implies S \setminus V_1 = F_1 \subseteq B_1 \implies F_1 \cap \bigcap_{i=2}^{n+2} B_i = \emptyset \quad y$$

$$V_1 \subseteq \bigcup_{i=2}^{n+2} B_i \implies S \setminus V_1 = F_1 \supseteq S \setminus \bigcup_{i=2}^{n+2} B_i \implies F_1 \cup \bigcup_{i=2}^{n+2} B_i = S.$$

Siguiendo el mismo procedimiento, existe un conjunto abierto V_2 tal que:

$$S \setminus B_2 \subseteq V_2 \subseteq \overline{V_2} \subseteq (S \setminus \overline{V_1}) \cup \bigcup_{i=3}^{n+2} B_i.$$

Ahora, si $F_2 = S \setminus V_2$, se tiene que:

$$F_1 \cup F_2 \cup \bigcup_{i=3}^{n+2} B_i = S \quad y \quad F_1 \cap F_2 \cap \bigcap_{i=3}^{n+2} B_i = \emptyset.$$

Continuando con este procedimiento acabaremos definiendo todos los F_i 's.

4. (4) \Rightarrow (3)

Suponemos cierto (4). Tenemos que:

$$F_1 \subseteq (U_1 \cap (S \setminus \bigcap_{i=2}^{n+2} F_i)).$$

Esto es cierto ya que $F_1 \subseteq U_1$, por la propia definición de los F_i 's y que $F_1 \subseteq (S / \bigcap_{i=2}^{n+2} F_i)$, también es cierto porque $\bigcap_{i=1}^{n+2} F_i = \emptyset$.

Usando el resultado correspondiente a la nota 5, existe un conjunto abierto B_1 tal que:

$$F_1 \subseteq B_1 \subseteq \overline{B_1} \subseteq (U_1 \cap (S \setminus \bigcap_{i=2}^{n+2} F_i)).$$

Por como está definido B_1 , se tiene que $\overline{B_1} \subseteq U_1$ y que $\overline{B_1} \cap \bigcap_{i=2}^{n+2} F_i = \emptyset$.

Luego también existe un conjunto abierto B_2 tal que,

$$F_2 \subseteq B_2 \subseteq \overline{B_2} \subseteq (U_2 \cap (S \setminus (\overline{B_1} \cap \bigcap_{i=3}^{n+2} F_i))).$$

Por lo tanto, $\overline{B_2} \subseteq U_2$ y $\overline{B_1} \cap \overline{B_2} \cap \bigcap_{i=3}^{n+2} F_i = \emptyset$. Continuando la demostración de esta forma, al final llegamos a que existe una familia de conjuntos abiertos B_i 's $i=1, \dots, n+2$ tales que:

$$B_i \subseteq U_i, \quad S \subseteq \bigcup_{i=1}^{n+2} B_i \quad y \quad \bigcap_{i=1}^{n+2} B_i = \emptyset.$$

■

Se denomina ancho de red de un cubrimiento al mayor de los diámetros de los conjuntos que lo forman.

Proposición 4 Sea S un espacio métrico con $\text{Cov}(S) \leq 1$. Tomemos A, B, C subconjuntos cerrados de S tales que $A \cap B \cap C = \emptyset$. Entonces existen conjuntos abiertos U, V, W cumpliendo que:

$$U \supseteq A, V \supseteq B, W \supseteq C, \quad U \cap W \cap V = \emptyset \quad U \cup V \cup W = S.$$

Demostración:

Si A, B, C son cerrados, entonces sus complementarios A', B' y C' son abiertos y además, aplicando las Leyes de De Morgan:

$$(A \cap B \cap C)^c = \emptyset^c \Rightarrow A^c \cup B^c \cup C^c = S,$$

cubren a S , $A^c \cup B^c \cup C^c = S$. Entonces, por el teorema 9, existen conjuntos cerrados F, G, H , $F \subseteq A^c$, $G \subseteq B^c$ y $H \subseteq C^c$, que cubren a S y tienen intersección vacía. Ahora, sus complementarios F^c, G^c, H^c , son conjuntos abiertos en S tales que, por coconstrucción: $A \subseteq F^c$, $B \subseteq G^c$ y $C \subseteq H^c$, $F^c \cap G^c \cap H^c = \emptyset$ y $F^c \cup G^c \cup H^c = S$. ■

Proposición 5 Sea S un espacio métrico con $\text{Cov}(S) \leq 1$. Tomemos A, B, C subconjuntos cerrados de S tales que $A \cap B \cap C = \emptyset$. Entonces existen conjuntos cerrados U, V, W cumpliendo que:

$U \supseteq A, V \supseteq B, W \supseteq C, U \cap V \cap W = \emptyset$ y $U \cup V \cup W = S$.

Demostración:

Usando la proposición 4 en el teorema 9, la demostración es trivial. ■ Notese que se pueden probar los recíprocos de las proposiciones 4 y 5.

Proposición 6 Sean A_1, A_2, A_3 subconjuntos cerrados de S tales que $A_1 \cap A_2 \cap A_3 = \emptyset$. Entonces existen U_1, U_2, U_3 abiertos tales que:

$$i = 1, 2, 3, \quad U_i \supseteq A_i, \quad \overline{U_1} \cap \overline{U_2} \cap \overline{U_3} = \emptyset.$$

Demostración:

Para $i=1,2,3$, definamos las funciones $d_i = d(x, A_i)$. Ya que $A_1 \cap A_2 \cap A_3 = \emptyset, \forall x \in S, d_1(x) + d_2(x) + d_3(x) > 0$. Ahora, para $i=1,2,3$, definamos los conjuntos:

$$U_i = \{x \in S : d_i(x) < \frac{1}{4}(d_1(x) + d_2(x) + d_3(x))\}.$$

Los U_i 's son abiertos y además $U_i \supseteq A_i$, ya que si $x \in A_i \Rightarrow d_i(x) = 0$.

Ahora ¿ $\overline{U_1} \cap \overline{U_2} \cap \overline{U_3} = \emptyset$? Supongamos que $x \in \overline{U_1} \cap \overline{U_2} \cap \overline{U_3}$, entonces:

$$i = 1, 2, 3, \quad d_i(x) < \frac{1}{4}(d_1(x) + d_2(x) + d_3(x)).$$

Si $d_1(x) < \frac{1}{4}(d_1(x) + d_2(x) + d_3(x)) \Rightarrow d_1(x) < \frac{d_2(x) + d_3(x)}{3}$,

$d_2(x) < \frac{1}{4}(d_1(x) + d_2(x) + d_3(x)) \Rightarrow d_2(x) < \frac{d_1(x) + d_3(x)}{2}$ y como también $d_3(x) < \frac{1}{4}(d_1(x) + d_2(x) + d_3(x))$, llegamos a la conclusión que $d_3(x) < \frac{d_1(x) + d_2(x)}{2}$, lo cual es absurdo ya que contradice lo anterior. ■

4.3.1. Teoremas de suma

Teorema 10 Sea S un espacio métrico, sean F_1 y F_2 subconjuntos cerrados de S tales que $\text{Cov}(F_1) \leq 1$ y $\text{Cov}(F_2) \leq 1$. Entonces $\text{Cov}(F_1 \cup F_2) \leq 1$.

Demostración:

Para probar el teorema debemos ver que todo cubrimiento de $F_1 \cup F_2$ posee un refinamiento de orden ≤ 1 . Usaremos el recíproco de la Proposición 5. Sean A, B, C conjuntos cerrados en $F_1 \cup F_2$ tales que $A \cap B \cap C = \emptyset$. Sus intersecciones con F_1 , $A \cap F_1, B \cap F_1, C \cap F_1$, son cerrados en F_1 , y con intersección vacía, $A \cap B \cap C \cap F_1 = \emptyset$. Entonces, por (Proposición 5), existen conjuntos cerrados K, L, M que contienen a los anteriores, $K \supseteq (A \cap F_1), L \supseteq (B \cap F_1), M \supseteq (C \cap F_1)$, cubren a $F_1, F_1 = K \cup L \cup M$ y su intersección es

vacía $K \cap L \cap M = \emptyset$.

Podemos definir los conjuntos:

$$(K \cup A) \cap F_2, (L \cup B) \cap F_2, (M \cup C) \cap F_2,$$

que por construcción sabemos que también tienen intersección vacía y son cerrados en F_2 y están contenidos en F_2 , por el mismo argumento de antes trasladado a F_2 existen conjuntos cerrados P, Q, R , tales que: $(K \cup A) \cap F_2 \subseteq P, (L \cup B) \cap F_2 \subseteq Q, (M \cup C) \cap F_2 \subseteq R, P \cap Q \cap R = \emptyset$ y $P \cup Q \cup R = F_2$. Ya estamos en condiciones de construir un cubrimiento de $F_1 \cup F_2$ con orden menor o igual que 1, éste es $E = P \cup K, F = Q \cup L$ y $G = R \cup M$, que, por como están construidos estos conjuntos, sabemos que :

1. E, F, G son cerrados.
2. $E \cap F \cap G = \emptyset$.
3. $E \cup F \cup G = F_2$.

Ya hemos encontrado que para un cubrimiento cualquiera de $F_1 \cup F_2$ tiene un refinamiento con orden menor o igual que 1. Por lo que acabamos de probar que $\text{Cov}(F_1 \cup F_2) \leq 1$. ■

Corolario 1 Sea S un espacio métrico, sean F_1 y F_2 subconjuntos cerrados de S tales que $\text{Cov}(F_1) \leq n$ y $\text{Cov}(F_2) \leq n$. Entonces $\text{Cov}(F_1 \cup F_2) \leq n$.

Demostración:

La prueba de este corolario es similar a la del teorema anterior con la diferencia de en vez de coger 3 conjuntos A, B, C hay que tener en cuenta $n+2$ conjuntos A_1, \dots, A_{n+2} y a partir de ahí, seguir los mismos pasos. ■

Teorema 11 Sea S un espacio métrico, sean $\forall i \in \mathbb{N}$ los conjuntos $F_i \subseteq S$ cerrados de S con $\text{Cov}(F_i) \leq 1$. Entonces $\text{Cov}(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} F_i) \leq 1$.

Demostración:

Debemos probar que la unión numerable de conjuntos cerrados con dimensión Cov menor o igual que uno tiene también dimensión Cov menor o igual que uno. Usaremos el recíproco de la Proposición 4. Para ello la estrategia a seguir será similar a la del teorema anterior, encontrar un cubrimiento de la unión que tenga orden menor o igual que 1. Procedamos entonces a construir ese cubrimiento. Asumiremos que $S = \bigcup F_i$. Sean los conjuntos cerrados en S , A, B, C con intersección vacía, $A \cap B \cap C = \emptyset$. Entonces, por (Proposición 6), existen conjuntos abiertos $A \subseteq U_0, B \subseteq V_0, C \subseteq W_0$ tales que:

$$\overline{U_0} \cap \overline{V_0} \cap \overline{W_0} = \emptyset.$$

Definiremos recursivamente:

1. $\overline{U_i} \supseteq \overline{U_{i-1}}, \quad \overline{V_i} \supseteq \overline{V_{i-1}}, \quad \overline{W_i} \supseteq \overline{W_{i-1}}.$
2. $\overline{U_i} \cap \overline{V_i} \cap \overline{W_i} = \emptyset.$
3. $F_i \subseteq U_i \cup V_i \cup W_i.$

Usaremos el procedimiento de inducción para probar que esas tres propiedades se cumplen para todo i . Si suponemos que $F_0 = \emptyset$, la base de la inducción queda probada, así que ahora asumamos que 1), 2) y 3) se cumplen $\forall i < k$. Los conjuntos $\overline{U_{k-1}} \cap F_k, \overline{V_{k-1}} \cap F_k, \overline{W_{k-1}} \cap F_k$, por como están contruidos, son cerrados y con intersección vacía. Usando la Proposición 5 y ya que $\text{Cov}(F_k) \leq 1$, existen subconjuntos de F_k cerrados $K_k \supseteq \overline{U_{k-1}} \cap F_k, L_k \supseteq \overline{V_{k-1}} \cap F_k, M_k \supseteq \overline{W_{k-1}} \cap F_k$, que tienen intersección vacía y unión exactamente todo F_k . $K_k \cap L_k \cap M_k = \emptyset, F_k, K_k \cup L_k \cup M_k = F_k$. Ahora los conjuntos $\overline{U_{k-1}} \cup K_k, \overline{V_{k-1}} \cup L_k, \overline{W_{k-1}} \cup M_k$, son cerrados y con intersección vacía, así que por (Proposición 4), existen conjuntos abiertos en S :

$$U_k \supseteq \overline{U_{k-1}} \cup K_k, \quad V_k \supseteq \overline{V_{k-1}} \cup L_k, \quad W_k \supseteq \overline{W_{k-1}} \cup M_k,$$

tales que cubren a F_k y la intersección de sus clausuras es vacía, con lo que quedaría probada la inducción.

Ahora si definimos los conjuntos:

$$U = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} U_i \quad V = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} V_i \quad W = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} W_i.$$

Por como están contruidos estos conjuntos, son abiertos en $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} F_k$, lo cubren y tienen intersección vacía, por lo tanto hemos demostrado que $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} F_k$ tiene un cubrimiento con orden 1. Entonces $\text{Cov}(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} F_k) \leq 1$. ■

Corolario 2 Sea S un espacio métrico, sean $\forall i \in \mathbb{N}$ los conjuntos $F_i \subseteq S$ cerrados de S con $\text{Cov}(F_i) \leq n$. Entonces $\text{Cov}(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} F_i) \leq n$.

Demostración:

La prueba de este corolario es similar a la del teorema anterior con la diferencia de, en vez de coger 3 conjuntos A,B,C, hay que tener en cuenta $n+2$ conjuntos A_1, \dots, A_{n+2} y a partir de ahí seguir los mismos pasos. ■

4.3.2. Teorema de subconjunto

Teorema 12 Sea S un espacio métrico y T un subconjunto de S , $T \subseteq S$. Entonces $\text{Cov}(T) \leq \text{Cov}(S)$.

Demostración:

Si $\text{Cov}(S)=\infty$, no hay nada que probar, ya que $\infty \geq \infty$.

Supongamos que $\text{Cov}(S)=n \in \mathbb{Z}$. Por lo tanto, debemos ver que $\text{Cov}(T) \leq n$. Para ver esto distinguiremos 3 casos, T cerrado, T abierto y T subconjunto cualquiera de S , ni cerrado ni abierto.

1. Supongamos primero que T es cerrado. Sea \mathcal{A} un cubrimiento abierto de T , ya que $T \subseteq S$, $\forall A \in \mathcal{A}$, $\exists E \subseteq S : A = E \cap T$, con E un abierto en S .
Ya que T es cerrado, $E \setminus T$ es abierto. Por lo tanto podemos definir un cubrimiento abierto en S de la forma:

$$\mathcal{A}_1 = \{E \subseteq S : E \cap T \in \mathcal{A}, E \text{ abierto}\} \cup \{S/T\}.$$

Ya que $\text{Cov}(S)=n$ existe un refinamiento de \mathcal{A}_1 , al que llamaremos \mathcal{A}_2 , que tiene orden $\leq n$.

Ahora sea $\mathcal{A}_3 = \{E \cap T : E \in \mathcal{A}_2\}$. \mathcal{A}_3 por construcción está subordinado a \mathcal{A} , y es un cubrimiento abierto de T con orden $\leq n$, por lo tanto, $\text{Cov}(T) \leq n$.

2. Ahora si T es abierto, T puede escribirse como la unión contable de conjuntos cerrados, $T = \bigcup_{i=1}^{\infty} F_j$, de la forma:

$$F_j = \{x \in S : d(x, S/T) \geq \frac{1}{j}\}.$$

Ahora, por (1), $\forall j \text{ Cov}(F_j) \leq n$, y entonces, basándonos en el corolario 2, $\text{Cov}(T) \leq n$.

3. Supongamos ahora T un subconjunto general de S , no tiene por qué ser ni cerrado ni abierto, sea $\{U_1, \dots, U_{n+2}\}$ un cubrimiento abierto de T . Sean los conjuntos V_i , abiertos de S , tales que $\forall i$, $U_i = V_i \cap T$. Ya que la unión numerable de abiertos es un abierto,

$$V = \bigcup_{i=1}^{n+2} V_i,$$

es un conjunto abierto en S . Por (2) $\text{Cov}(V) \leq n$, entonces existe un refinamiento de $\{V_1, \dots, V_{n+2}\}$, $\{W_1, \dots, W_{n+2}\}$, tal que $\forall i$, $W_i \subseteq V_i$, W_i abiertos y

$$\bigcap_{i=1}^{n+2} W_i = \emptyset, \quad \bigcup_{i=1}^{n+2} W_i = V,$$

ya que $W_i \cap T$ son abiertos en T , cubren a T y ,

$$\bigcap_{i=1}^{n+2} (W_i \cap T) = \emptyset.$$

Entonces $W_i \cap T$ forman un refinamiento de orden $\leq n$, y en consecuencia, podemos asegurar que $\text{Cov}(T) \leq n$.

■

Teorema 13 La dimensión topológica de \mathbb{R}^n es n .

Demostración:

La demostración de este teorema se puede encontrar íntegra en el libro [2]. Se trata del teorema 3.2.7 en la página 127. ■

Teorema 14 *Sea S un espacio métrico completo, entonces la dimensión de cubrimientos de S es menor o igual que la dimensión de Hausdorff de S .*

Demostración:

La demostración completa de este teorema se encuentra en la sección 3.1 de la referencia bibliográfica [8]. ■

Capítulo 5

Ejemplos de fractales

5.1. Conjunto de Cantor

5.1.1. Introducción

El Conjunto de Cantor, también llamado en inglés “the Cantor Dust”, polvo de Cantor, dust (polvo) es el término que en inglés se utiliza para denominar a los conjuntos con dimensión topológica igual a cero.

Es un subconjunto de la recta real comprendido entre el intervalo $[0,1]$.

Al estar contenido en \mathbb{R} , es un ejemplo de fractal muy sencillo de entender y comprenderlo. Viene muy bien para interiorizar conceptos clave en este tipo de conjuntos, como el de autosemejanza.

Recursivamente, se puede construir de la siguiente manera: empiezas por el intervalo $[0,1]=C_0$, luego este lo divides en 3 partes iguales y te quedas con los extremos derecho e izquierdo, luego eliminas la parte del medio. Así queda:

$$C_1 = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1].$$

Aplicaremos esta idea de dividir en 3 y quitar la parte central a los subintervalos que van quedando, así:

$$C_2 = [0, \frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{9}, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, \frac{7}{9}] \cup [\frac{8}{9}, 1].$$

Estos conjuntos, los C_k son una secuencia decreciente, es decir,

$$\forall i \in \mathbb{N}: C_i \supseteq C_{i+1}.$$

El conjunto de Cantor se define como:

$$C = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} C_k. \tag{5.1}$$

El proceso de construcción del conjunto de Cantor se ilustra muy bien en esta imagen:

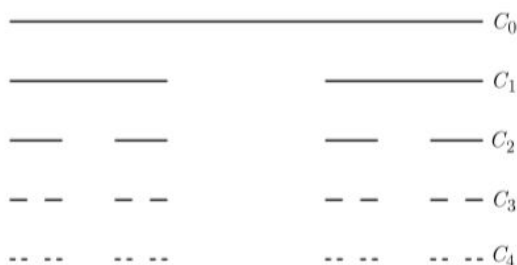


Figura 5.1: Construcción del Conjunto de Cantor.

Cada conjunto C_k está compuesto por 2^k intervalos cerrados y disjuntos entre ellos que miden $\left(\frac{1}{3}\right)^k$ cada uno. La longitud total de cada C_k es la suma de las longitudes de cada intervalo disjunto que contiene, esto es, $\left(\frac{2}{3}\right)^k$.

Así que la longitud total de todo el conjunto de Cantor será,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{3}\right)^k = 0.$$

Proposición 7 No hay dentro del conjunto de Cantor intervalos con longitud mayor que 0.

Demostración:

Sea I un intervalo dentro del conjunto de Cantor. Por lo tanto, $\forall k \in \mathbb{N}$, $I \subseteq C_k$, entonces $\forall k$ la longitud de I tiene que ser menor o igual que $\left(\frac{1}{3}\right)^k$, y el único número que cumple esto es 0. Así que la longitud de I es 0. ■

Que la longitud (medida 1-dimensional) del conjunto de Cantor sea 0, da a entender que la dimensión de este conjunto se va a encontrar entre 0 y 1. Procedamos a calcular su dimensión de fraccionaria.

5.1.2. Cálculo de la dimensión fraccionaria del conjunto de Cantor

El conjunto de Cantor, \mathcal{C} , puede ser construido recursivamente utilizando el siguiente sistema iterado de funciones:

$$f_1(x) = \frac{x}{3}, \quad f_2(x) = \frac{x+2}{3}.$$

De la siguiente forma:

$$C_0 = [0, 1], \quad C_1 = f_1[C_0] \cup f_2[C_0], \dots, \quad C_k = f_1[C_{k-1}] \cup f_2[C_{k-1}].$$

La siguiente imagen ilustra el proceso de construcción del conjunto de Cantor mediante las funciones iteradas.

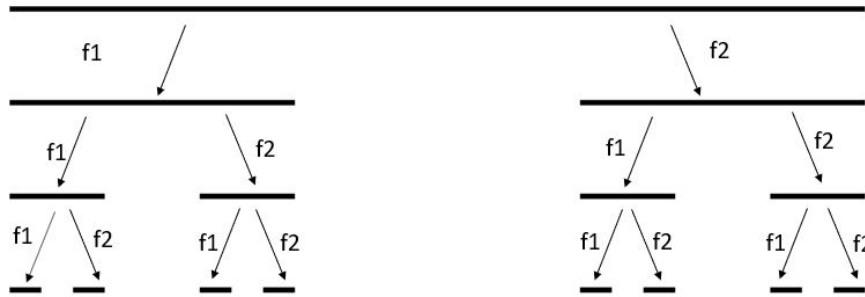


Figura 5.2: Construcción del Conjunto de Cantor mediante funciones iteradas.

La lista de radios asociada al anterior conjunto de funciones iteradas es $\{\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\}$. Por lo tanto, su dimensión de autosemejanza será un número natural s tal que:

$$\left(\frac{1}{3}\right)^s + \left(\frac{1}{3}\right)^s = 1.$$

Resolviendo la ecuación queda $s = \frac{\lg(2)}{\lg(3)}$, que es la dimensión de autosemejanza del conjunto de Cantor.

Y ya que para el interior de C_0 , $\overset{\circ}{C}_0 = (0, 1)$, el sistema iterado de funciones, cumple con la condición de conjunto abierto de Morán ya que,

$$f_1(\overset{\circ}{C}_0) = (0, \frac{1}{3}), \quad f_2(\overset{\circ}{C}_0) = (\frac{2}{3}, 1),$$

que son conjuntos con intersección vacía, y \mathcal{C} es el conjunto invariante, se tiene que por el Teorema 8 que $s = \dim(\mathcal{C})$. Es decir, que para \mathcal{C} las dimensiones de Hausdorff y autosemejanza son iguales.

Ahora, ¿cuál es la dimensión de cubrimientos del conjunto de Cantor? Por el teorema 14, la dimensión de cubrimientos del conjunto debe ser un número entero no negativo menor que $\frac{\lg(2)}{\lg(3)}$, por lo tanto la dimensión de cubrimientos del conjunto de Cantor solo puede ser 0.

5.1.3. Caracterización de los elementos del conjunto de Cantor

En este apartado, nos dispondremos a caracterizar los elementos del conjunto Cantor, apoyándonos en su representación en base 3, lo que nos ayudará a deducir propiedades importantes del mismo, como su cardinalidad.

Teorema 15 Sea $x \in [0, 1]$. Entonces x pertenece al conjunto de Cantor, $x \in C$, si y sólo si, se puede expresar en base 3, usando solo los dígitos 0 y 2.

Demostración:

Los números que en base 3 que tienen un 1 en la primera posición decimal, se encuentran dentro del intervalo,

$$[0,1_{(3)}, 0,122222\ldots_{(3)}] = \left[\frac{1}{3_{(10)}}, \frac{2}{3_{(10)}} \right].$$

Así quedarían fuera, los elementos que no están en C_1 .

Notemos que, los propios $\frac{1}{3}$ y $\frac{2}{3}$, también tienen una representación en base 3 sin utilizar el dígito "1". Estas son:

$$\frac{1}{3_{(10)}} = 0,02222\ldots_{(3)}, \quad \frac{2}{3_{(10)}} = 0,2_{(3)}.$$

Ahora seguimos el proceso con los números que tienen un 1 en la segunda posición decimal. Se encuentran entre 3 intervalos:

1. El primero,

$$[0,01_{(3)}, 0,0122222\ldots_{(3)}] = \left[\frac{1}{9_{(10)}}, \frac{2}{9_{(10)}} \right],$$

Con lo que hemos eliminado los puntos del intervalo $\left[\frac{1}{9_{(10)}}, \frac{2}{9_{(10)}} \right]$. Menos los extremos, que al igual que antes, también tienen representación en base 3, sin usar el dígito 1.

2. El segundo,

$$[0,11_{(3)}, 0,1122222\ldots_{(3)}] = \left[\frac{4}{9_{(10)}}, \frac{5}{9_{(10)}} \right].$$

Este intervalo, en el paso anterior lo hemos dejado fuera.

3. El tercero,

$$[0,21_{(3)}, 0,2122222\ldots_{(3)}] = \left[\frac{7}{9_{(10)}}, \frac{8}{9_{(10)}} \right].$$

Con lo que hemos eliminado los puntos del intervalo, $\left[\frac{7}{9_{(10)}}, \frac{8}{9_{(10)}} \right]$, menos los extremos, que al igual que antes también tienen representación en base 3, sin usar el dígito 1.

Con lo que hemos eliminado los puntos que quedan fuera de C_2 .

Siguiendo con esta construcción, deducimos que, los elementos del conjunto de Cantor, son aquellos que tienen representación en base 3, sin usar el dígito 1. ■

Esta demostración es muy intuitiva, viéndola desde el punto de vista de como está estructurado el conjunto de Cantor. En sí, éste se construye, empezando por el intervalo $[0, 1]$, dividiéndolo recursivamente en 3 partes iguales y eliminando del conjunto, la parte central.

Un método gráfico para representar los números del intervalo $[0, 1]$, en base 3, es dividir el intervalo en 3 partes iguales,

$$\left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right].$$

Si el número está en la primera parte, empezará a escribirse 0.0, si está en la segunda, 0.1 y en la tercera 0.2. Luego, habrá que repetir el proceso recursivamente, para encontrar el resto de cifras decimales.

Por ejemplo, si queremos representar el número 0.5 en base 3, según el método, su representación será 0.11111111..., ya que, por muchas veces que dividas en 3, este, siempre se va a encontrar en el centro.

El proceso se ilustra en la siguiente imagen:

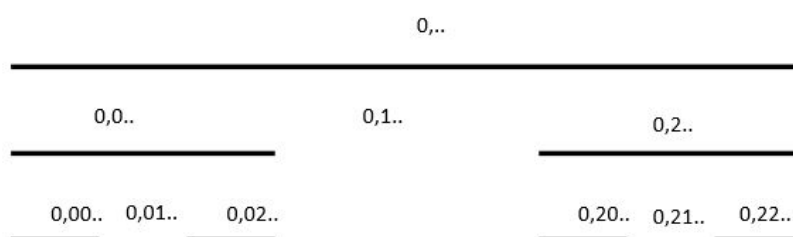


Figura 5.3: Coordenadas en base 3.

En la figura 5.3 se puede apreciar bastante bien que los números que en su representación en base 3 cuentan con un algún dígito 1, quedan fuera del conjunto de Cantor, excepto aquellos que también se pueden representar sin usar dicho dígito, como $\frac{1}{3}$.

Una consecuencia inmediata de esta caracterización de los elementos de \mathcal{C} es que se puede establecer una biyección entre los elementos de \mathcal{C} y el intervalo $(0, 1)$.

Esta biyección consiste en asignarle a cada elemento de \mathcal{C} en base 3 el mismo número cambiándole los 2's por 1's, y así obtendríamos todos los elementos del intervalo $(0,1)$ expresados en base 2. Y al ser este intervalo a su vez biyectivo con la recta real \mathbb{R} , también se puede establecer una biyección entre \mathcal{C} y \mathbb{R} . Por lo tanto, estamos en condiciones de afirmar que \mathcal{C} es biyectivo con \mathbb{R} . Entonces, su cardinal es el mismo.

Nota 6 Al aplicar la función $f_1(x) = \frac{x}{3}$, a un $x \in [0, 1]$ expresado en base 3, lo que estamos haciendo realmente, es añadirle un 0, al inicio de la expresión decimal. Al aplicar la función

$f_2(x) = \frac{x+2}{3}$ a un $x \in [0, 1]$ expresado en base 3, lo que haces es añadirle un 2, al inicio de la expresión decimal.

Ejemplo 5 En este ejemplo vamos a ver que lo que dice la nota 6 es cierto.

$f_1(\frac{1}{3}) = \frac{1}{9}$, y $\frac{1}{3}$ tiene expresión en base 3, 0.1 y $\frac{1}{9}$, 0.01 .

$f_2(\frac{1}{3}) = \frac{7}{9}$, y $\frac{1}{3}$ tiene expresión en base 3, 0.1 y $\frac{7}{9}$, 0.21 .

5.2. Triángulo de Sierpinski

A grandes rasgos, si el conjunto de Cantor vive entre las dimensiones 0 y uno, el triángulo de Sierpinski es su análogo viviendo entre las dimensiones 1 y 2. Por lo que no le dedicaremos un análisis tan completo como al conjunto de Cantor. Construyéndolo iterativamente empezamos en el conjunto S_0 , un triángulo equilátero cerrado de área 1. Luego dividimos este en 4 triángulos equiláteros iguales, uniendo los puntos medios de las 3 aristas de S_0 , eliminamos el triángulo central y me quedo con los de los extremos. Esta secuencia es decreciente, $S_0 \supseteq S_1 \supseteq \dots \supseteq S_k$. Y haciendo el límite, encontramos S , el triángulo de Sierpinski,

$$S = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} S_k.$$

El proceso se ilustra en la siguiente figura. Las partes oscuras son las pertenecientes a cada fase de la iteración.

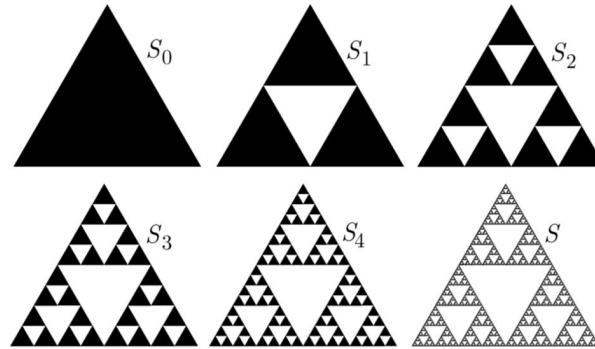


Figura 5.4: Proceso de construcción del triángulo de Sierpinski.

Teniendo en cuenta que el área de S_0 era uno. S_k es la unión, de exactamente 3^k triángulos equiláteros y cada uno con área $\left(\frac{1}{4}\right)^k$. Por lo tanto, el área de S_k es $\left(\frac{3}{4}\right)^k$. Y la del triángulo de Sierpinski es

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{4}\right)^k = 0.$$

Mientras que si calculamos la longitud del contorno de S . En S_k hay 3^k triángulos cada uno con 3 aristas midiendo cada una 2^{-k} . Por lo tanto la longitud del contorno del

triángulo de Sierpinski es

$$\lim_{k \rightarrow \infty} 3 \left(\frac{3}{2} \right)^k = \infty.$$

La longitud (medida 1-dimensional) del contorno de S es infinito y el área (medida 2-dimensional) es 0. Esto parece indicar que S vivirá en una dimensión t que se encuentre entre 1 y 2.

5.2.1. Cálculo de la dimensión del triángulo de Sierpinski

El sistema iterado de funciones que deja S invariante, son tres funciones, que realizan una contracción, con radio $\frac{1}{2}$, y translación cada una, (f_1, f_2, f_3) , por lo tanto, tiene lista de radios asociada, $(1/2, 1/2, 1/2)$. Entonces, la dimensión de autosemejanza asociada será un número $s \in \mathbb{R}$, tal que,

$$\left(\frac{1}{2} \right)^s + \left(\frac{1}{2} \right)^s + \left(\frac{1}{2} \right)^s = 1.$$

Y este número es $s = \frac{\lg(3)}{\lg(2)}$, que efectivamente está entre 1 y 2.

Para S_0 , el sistema iterado de funciones cumple con la condición de conjunto abierto de Morán, ya que:

$$f_1(S_0) \cap f_2(S_0) \cap f_3(S_0) = \emptyset \quad i = 1, 2, 3 \quad y \quad f_i(S_0) \subseteq S_0.$$

y S es el conjunto invariante se tiene que por el Teorema 8. $s = \dim(S)$, es decir que para s las dimensiones de Hausdorff y autosemejanza son iguales.

Ahora, ¿cuál es la dimensión topológica del triángulo de Sierpinski? Tiene que ser un número entero mayor o igual que 0, y por el teorema 14, tiene que ser menor o igual que su dimensión de Hausdorff, $\frac{\lg(3)}{\lg(2)}$, por lo tanto, tiene que ser 0 o 1 y no es cero ya que, el borde del triángulo de Sierpinski, que está contenido en él mismo, es un triángulo equilátero de dimensión 1, por el teorema 12, la dimensión topológica del triángulo de Sierpinski debe ser 1.

5.3. Curva de Koch

5.3.1. Construcción de la curva de Koch

La curva de Koch es otro ejemplo de fractal viviendo entre las dimensiones uno y dos. A continuación veremos qué forma tiene y dos maneras de construirla.

Construcción por tremas

Con esta forma de construirlo, lo que haremos será partir de un todo, e iremos quitándole partes a ese todo. Ese todo del que hablamos es L_0 , un triángulo isósceles con ángulos 120° , 30° y 30° .

En la siguiente iteración L_1 , lo que hemos hecho ha sido quitarle a L_0 un triángulo equilátero situado en la mitad, quedándonos así con dos triángulos isósceles semejantes a L_0 . Repitiendo el proceso sobre cada triángulo isósceles recursivamente como se muestra en la figura 5.5, obtenemos el resto de L_i .

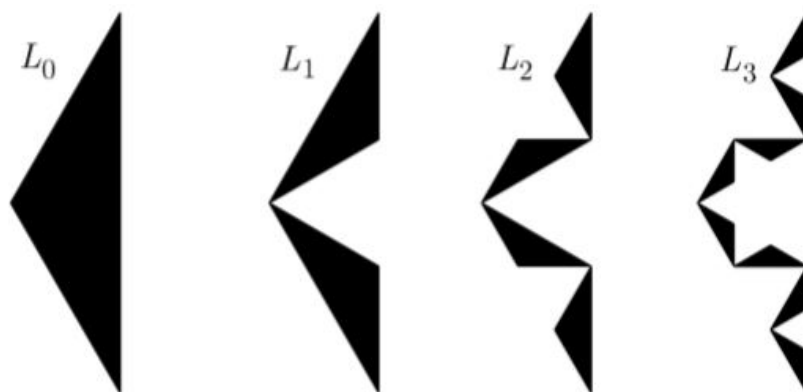


Figura 5.5: Proceso de construcción de la curva de Koch por tremas.

Por lo tanto de esta forma la curva de Koch se define como:

$$L = \bigcap_{i=0}^{\infty} L_i.$$

Construcción de tipo dragón

Esta construcción se basa en la deformación de segmentos. Empezamos con P_0 el intervalo $[0, 1]$. Quitamos el trozo $[1/3, 2/3]$, y en esa parte formamos un triángulo equilátero de lado $1/3$, obteniendo así P_1 , y actuando de igual forma con todos los segmentos recursivamente como se ve en la figura 5.6, obtenemos el resto de los P_i .

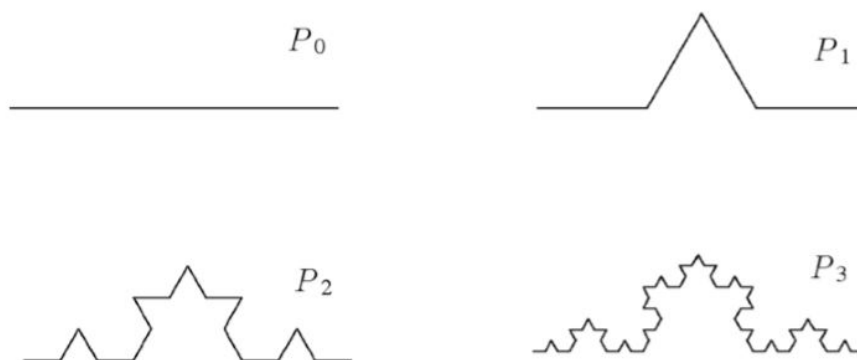


Figura 5.6: Proceso de construcción de la curva de Koch de tipo dragón.

Cada iteración de la curva de Koch, P_k tiene una parametrización asociada, por lo tanto el límite cuando k tiende a infinito de las parametrizaciones de los P_k 's da una parametrización de la curva de Koch.

Cada P_k tiene 4^k segmentos de longitud 3^{-k} , por lo tanto, la longitud total de la curva de Koch es mayor que $\left(\frac{4}{3}\right)^k$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Por lo tanto la curva de Koch mide infinito.

Que la medida 1-dimensional sea infinito nos da a entender que su dimensión será mayor que 1.

5.3.2. Cálculo de la dimensión de la curva de Koch.

En la construcción de tipo dragón de la curva hemos visto que cada segmento se transformaba en otros cuatro, dilatando cada uno $1/3$, y aplicándoles, a parte de la dilatación, una traslación y rotación. Siendo más concretos:

$$f_1(x, y) = \left(\frac{x}{3}, \frac{y}{3}\right),$$

$f_2(x, y)$ es f_1 trasladándola $\left(\frac{1}{3}, 0\right)$ y girándola 60° respecto al punto $\left(\frac{1}{3}, 0\right)$.

$f_3(x, y)$ es f_1 trasladándola $\left(\frac{1}{3}, 0\right)$ y girándola 60° respecto al punto $\left(\frac{2}{3}, 0\right)$.

$f_4(x, y) = \left(\frac{2+x}{3}, \frac{y}{3}\right)$.

Por lo tanto, la lista de radios asociada a la lista de funciones iteradas que genera la curva es:

$$\left\{\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right\}.$$

La dimensión de semejanza de la curva de Koch será un número s tal que:

$$\left(\frac{1}{3}\right)^s + \left(\frac{1}{3}\right)^s + \left(\frac{1}{3}\right)^s + \left(\frac{1}{3}\right)^s = 1,$$

y este número es $s = \frac{\lg(4)}{\lg(3)}$.

Ya que para el interior de L_0 el sistema iterado de funciones cumple con la condición de conjunto abierto de Morán, notar que:

$$f_1(L_0^\circ) \cup f_2(L_0^\circ) \cup f_3(L_0^\circ) \cup f_4(L_0^\circ) = L_2 \subset L_0,$$

y los elementos de la unión son disjuntos.

P , curva de Koch, es el conjunto invariante, se tiene que por el Teorema 8, $s = \dim(P)$, es decir, que para la curva de Koch, las dimensiones de Hausdorff y autosemejanza son iguales.

Por el teorema 14, la dimensión de cubrimientos de la curva de Koch tiene que ser menor que la de Hausdorff, es decir, la dimensión de cubrimientos puede ser o 0 o 1, 0 no puede ser ya que no cumple con la definición de espacio 0-dimensional, (21).

Copo de nieve de Koch

Si unimos tres curvas de Koch con forma de pseudo-triángulo equilátero, obtenemos una estructura llamada copo de nieve de Koch.

En la figura 5.7 se ven las 4 primeras iteraciones de este conjunto.

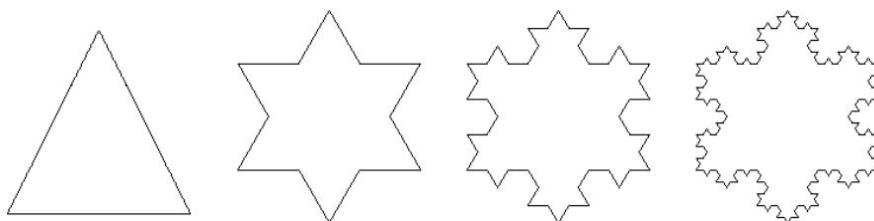


Figura 5.7: 4 primeras iteraciones del copo de nieve de Koch.

5.4. Conjuntos de Julia

Este tipo de conjuntos, que en las condiciones óptimas se tratan de fractales, deben su nombre al matemático francés Gaston Julia (3 de febrero de 1893, Sidi Bel Abes, Argelia - 19 de marzo de 1978, París, Francia), pionero en el estudio de fractales.

Este tipo de conjuntos corresponden a la frontera de atracción de los puntos fijos de un polinomio f con grado $n \geq 2$ y coeficientes en \mathbb{C} (plano complejo). En función del valor de la derivada de la función en el punto fijo, hay 3 tipos de puntos fijos. Sea z_0 tal que $f(z_0) = z_0$ y $\lambda = f'(z_0)$.

- Si $|\lambda| > 1$, el punto fijo z_0 es repulsor.
- Si $|\lambda| < 1$, el punto fijo z_0 es atractor.
- Si $|\lambda| = 0$, el punto fijo z_0 es superatractor.
- Si $|\lambda| = 1$, el punto fijo z_0 es indiferente.

Definición 22 Sea f un polinomio con coeficientes en \mathbb{C} y grado $n \geq 2$. Se define el conjunto de Julia completo de f , $K(f)$, como:

$$K(f) = \{z \in \mathbb{C} : f^k(z) \not\rightarrow \infty\}$$

Definición 23 Se define el conjunto de Julia f , $J(f)$, como la frontera del conjunto de Julia completo, $\delta(K(f)) = J(f)$.

Por lo tanto, si $z \in J(f)$, en todo entorno de z hay puntos v y w tales que,

$$f^k(w) \rightarrow \infty, \quad f^k(v) \not\rightarrow \infty.$$

Ejemplo 6 Sea la función $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, tal que $f(z) = z^2$. se tiene que:

$$f^k(z) = z^{2^k},$$

por lo tanto:

- Si $|z| < 1 \Rightarrow f^k(z) \rightarrow 0$.
- Si $|z| = 1$, cuando k tienda a infinito, z prevalecerá en la circunferencia de radio 1.
- Si $|z| > 1 \Rightarrow f^k(z) \rightarrow \infty$.

Se puede ver que $f(z) = z^2$ tiene 2 puntos fijos, $z=0$ y $z=1$, pero, mientras que el 0 es super-atractor, $f'(0) = 0$, el 1 es repulsor, $f'(1) = 2$.

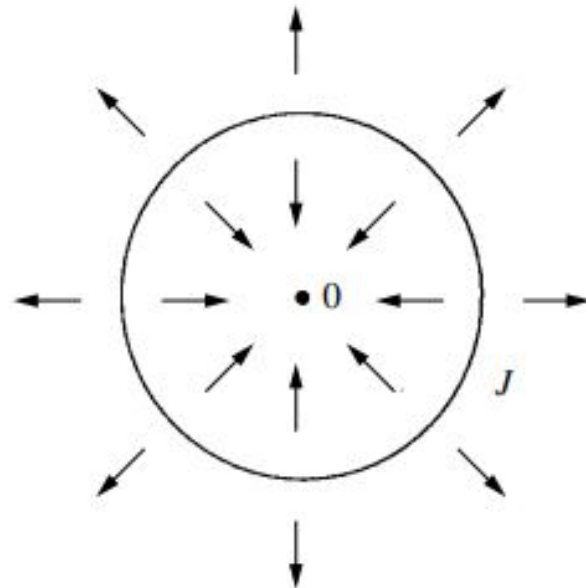


Figura 5.8: Conjunto de Julia para $f(z)=z^2$

Como se puede apreciar en la figura 5.8, en este caso particular el conjunto de Julia no es un fractal, es la circunferencia centrada en el 0 y de radio 1.

5.4.1. Conjunto de Julia para la familia cuadrática

Llamaremos familia cuadrática al conjunto de funciones con la forma:

$$f_c(z) = z^2 + c, \quad c \in \mathbb{C}.$$

Estas familias de funciones tienen dos puntos fijos,

- $z_0 = \frac{1+\sqrt{1-4c}}{2},$
- $z_1 = \frac{1-\sqrt{1-4c}}{2}.$

Habrá que ver, según c , si son atractores o repulsores.

Proposición 8 *El conjunto de Julia completo para la familia cuadrática de funciones está incluido en la bola cerrada de centro en 0 y radio el máximo entre $|c|$ y 2.*

Demostración:

Tenemos que probar que si $|z| > \max\{2, |c|\}$ entonces:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f_c^k(z) \rightarrow \infty.$$

Sea $\epsilon > 0$ y $z \in \mathbb{C}$ tal que, $|z| > 2 + \epsilon$.

$$|f_c(z)| = |z^2 + c| \geq |z^2| - |c| \geq |z^2| - |z| = |z|(|z| - 1)$$

Ya que $|z| > 2 + \epsilon \Rightarrow |z| - 1 > 1 + \epsilon$, por lo tanto,

$$|z|(|z| - 1) \geq |z|(1 + \epsilon) \Rightarrow |f_c(z)| \geq |z|(1 + \epsilon),$$

aplicando k -veces f_c , se tiene:

$$|f_c^k(z)| \geq |z|(1 + \epsilon)^k \rightarrow \infty.$$

■

5.4.2. Algoritmos para el cómputo del conjunto de Julia

En la siguiente sección expondremos una lista de algoritmos iterativos para el cálculo del conjunto de Julia, restringiéndonos a la familia cuadrática, $f_c(z) = z^2 + c$.

Algoritmo tiempo de escape

Este algoritmo iterativo sirve para aproximar el conjunto completo de Julia, $K(f_c)$ y se basa en la proposición 8. Por ello, el primer paso de la iteración será $Q_c^0 = B_{\max\{2, |c|\}}(0)$, o sea, la bola cerrada con centro en 0 y radio el máximo entre 2 y módulo de c .

Ahora,

$$Q_c^{-1} = \{z \in \mathbb{C} : f_c^1(z) \in Q_c^0\}.$$

En general podemos definir:

$$Q_c^{-k} = \{z \in \mathbb{C} : f_c^k(z) \in Q_c^0\}.$$

Se tiene que,

$$Q_c^0 \supseteq Q_c^{-1} \supseteq \dots \supseteq Q_c^{-k}.$$

Así:

$$\bigcap_{k=0}^{\infty} Q_c^{-k} = K(f_c).$$

Veamos el contenido \supset , todos los puntos que queden fuera de algún Q_c^{-k} están en la región de atracción de ∞ .

Para el otro lado si $z_0 \in \bigcap_{k \in \mathbb{N}} Q_c^{-k}$, entonces $f_c^k(z_0) \in B_{\max\{2, |c|\}}(0)$, por lo tanto no puede tender a ∞ .

Si representamos de colores diferentes a las regiones de,

$$Q_c^{-k} \setminus Q_c^{-(k+1)},$$

podremos visualizar las diferentes velocidades de convergencia de esos puntos a infinito.

5.4.3. Ejemplos de conjuntos de Julia

Para estos ejemplos usaremos la familia cuadrática de funciones $f_c = z^2 + c$, $c \in \mathbb{C}$.

1. Sea $c = -0.5 + 0.5i$,

Los puntos fijos de f_c son los que cumplen con la ecuación $f_c(z) = z$, y éstos son:

$$z_1 = -0,40867701 + 0,27512526i, \quad z_2 = 1,40867701 - 0,27512526i.$$

Se tiene que $|f'_c(z_1)| < 1$ y que $|f'_c(z_2)| > 1$, por lo tanto, z_1 es un punto fijo atractor, mientras que z_2 es un punto fijo repulsor.

En la figura 5.9 se representa el conjunto de Julia Completo en negro y en rojo z_1 dentro del conjunto y z_2 en el borde.

2. Ahora sea $c = 0.1 + 0.1i$.

Los puntos fijos de f_c son :

$$z_1 = 0,0936273 + 0,12304i, \quad z_2 = 0,906373 - 0,12304i.$$

Se tiene que $|f'_c(z_1)| < 1$ y que $|f'_c(z_2)| > 1$, por lo tanto, z_1 es un punto fijo atractor, mientras que z_2 es un punto fijo repulsor. La siguiente figura 5.10 lo representa: Al ser c cercano a cero, intuitivamente el conjunto de Julia para f_c tendría que parecerse al conjunto de Julia para f_0 , la circunferencia de centro en 0 y radio 1, y es lo que vemos, una circunferencia de centro 0 y radio 1 un poco deformada.

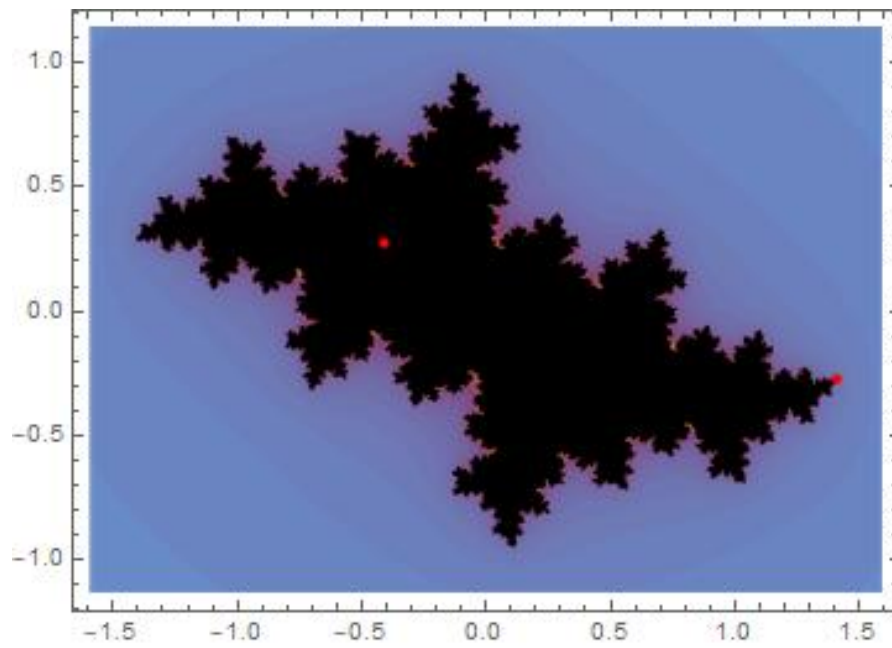


Figura 5.9: Conjunto de Julia con $c=0.5+0.25i$

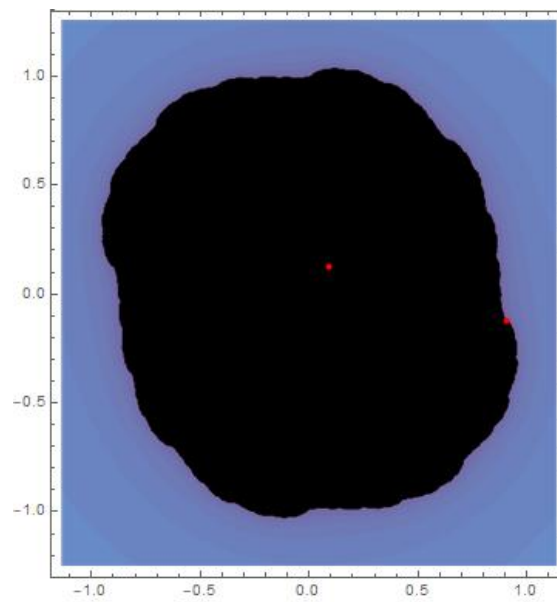


Figura 5.10: Conjunto de Julia con $c=0.1+0.1i$

Capítulo 6

Conclusiones

1. Durante este trabajo hemos sentado las bases teóricas que nos han permitido analizar y comprender mejor qué son los fractales.
2. Hemos estudiado la medida y dimensión de Hausdorff que puede ser fraccionaria.
3. Hemos definido una dimensión topológica, la dimensión de cubrimientos. Esta dimensión toma valores enteros y es menor o igual que la de Hausdorff. Así hemos visto varios ejemplos de conjuntos donde la dimensión de cubrimientos no coincide con la de Hausdorff, es decir, fractales según la dimensión de Mandelbrot.
4. En algunos casos la autosemejanza nos permite calcular la dimensión de Hausdorff de un modo fácil.

Bibliografía

- [1] DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS DE LA UNIVERSIDAD DE EXTREMADURA *Apuntes de teoría de la medida*, Badajoz, 22 de Enero de 2018. <http://matematicas.unex.es/~ricarfr/librotmed.pdf>
- [2] A. R. PEARS, *Dimension theory of general spaces*, Cambridge University Press, 1975.
- [3] A. GIRALDO CARBAJO, C. ESCRIBANO IGLESIAS, M. A. SASTRE ROSA , *Sistemas dinámicos complejos*, <http://ocw.upm.es/matematica-aplicada/introduccion-a-los-sistemas-dinamicos/contenidos/sdcomplejos.html#>.
- [4] B. MANDELBROT, *The fractal geometry of nature*, W. H. FREEMAN AND COMPANY, New York.
- [5] C. SWARTZ, *Measure integration and function spaces*, World Scientific, 1994.
- [6] F. HAUSDORFF, *Dimension und äusseres Mass*. Mathematische Annalen, 1919.
- [7] G. EDGAR, *Measure, topology and Fractal Geometry*, Second Edition, Springer.
- [8] G. EDGAR, *Integral, Probability, and Fractal Measures*, Springer, New York, 1998.
- [9] K. FALCONER, *Fractal Geometry*, Second Edition, University of St Andrews, Uk, 2003.
- [10] H. TROCHET, *A History of Fractal Geometry*, University of St. Andrews, <http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/history/HistTopics/fractals.html>.